

# ANALIZA I OBRADA SIGNALA U VREMENSKOM DOMENU

Obrada signala u vremenskom domenu podrazumijeva određivanje odziva na pobudu proizvoljnog oblika. Dinamički linearni sistemi opisani su diferencijalnim jednačinama i određivanje odziva njihovim direktnim rješavanjem u opštem slučaju nije jednostavan problem. Mi ćemo se zadržati na analizi i obradi signala linearnim, vremenski invarijantnim (Linear Time Invariant - LTI) sistemima. Vidjećemo da se LTI sistem u potpunosti može opisati preko njegovog odziva na jediničnu impulsnu funkciju, odnosno impulsnog odziva. Ukoliko znamo impulsni odziv, operacija konvolucije, do koje se dolazi predstavljanjem signala proizvoljnog oblika jediničnim impulsnim funkcijama, omogućava nam da pronađemo odziv na proizvoljnu pobudu. Analizirajući osobine LTI sistema vidjećemo da se, osim impulsnim odzivom, LTI sistem može okarakterisati i drugim funkcijama sistema, od kojih je pri obradi signala u vremenskom domenu najznačajniji jedinični odskočni odziv, definisan kao odziv na jediničnu odskočnu funkciju.

## 4.1 Impulsni odziv LTI sistema

Impulsni odziv  $h(t)$  linearnog, vremenski invarijantnog sistema se definiše kao odziv na pobudu u vidu jedinične impulsne (Dirakove) funkcije  $\delta(t)$ :

$$h(t) = \mathcal{F}_{LTI} \{ \delta(t) \}, \quad (4.1)$$

gdje je sa  $\mathcal{F}_{LTI}$  označen operator kojim LTI sistem transformiše pobudni signal u signal odziva.

## 4.2 Konvolucija

Matematička operacija označena kao konvolucija omogućava pronalaženje odziva LTI sistema na pobudni signal proizvoljnog oblika, ako je poznat impulsni odziv sistema. Kako bismo to pokazali, prvo ćemo predstaviti pobudni signal kao integral impulsnih funkcija, a zatim odrediti odziv na tako zapisan signal, koristeći osobinu superpozicije LTI sistema.

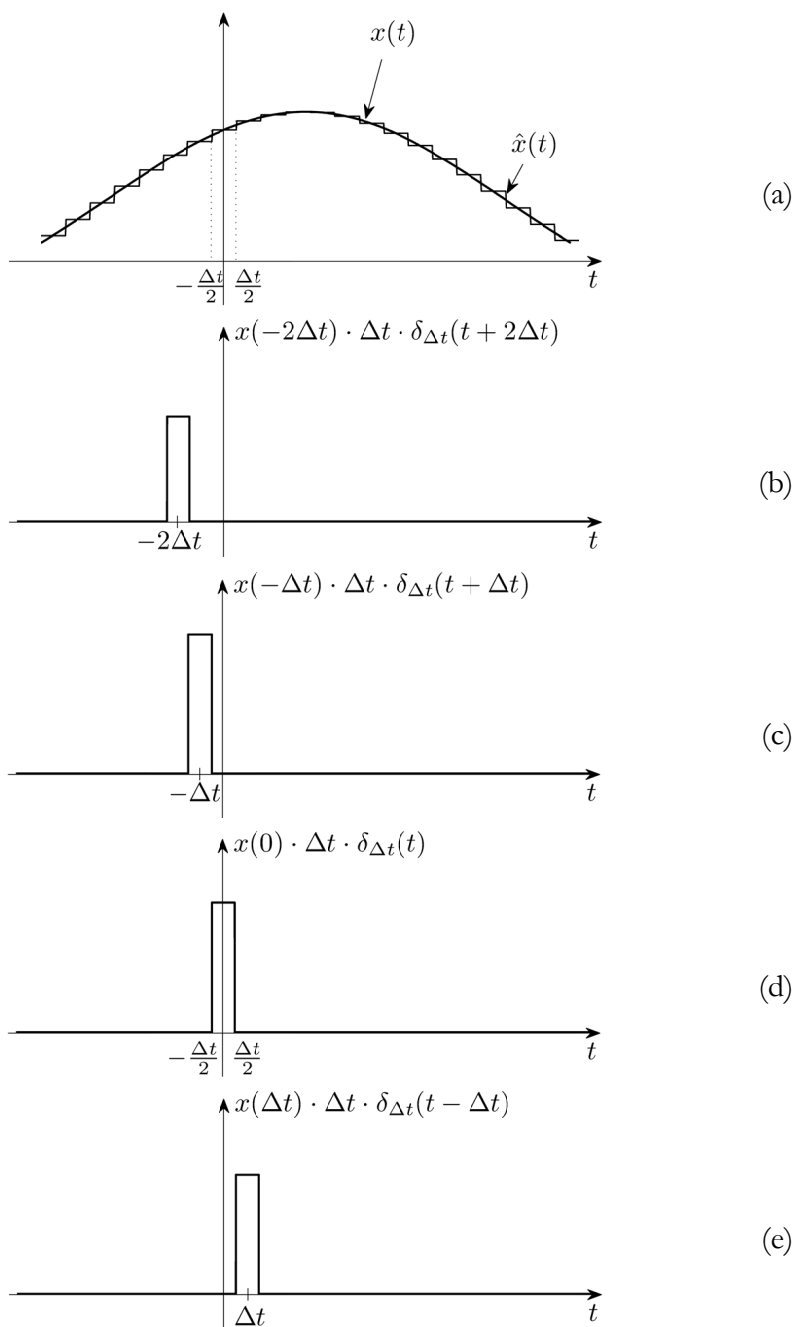
### 4.2.1 Predstavljanje signala impulsnim funkcijama

Posmatrajmo stepenastu aproksimaciju  $\hat{x}(t)$  signala  $x(t)$ , kao na Slici 4.1. Ova aproksimacija se može izraziti kao linearna kombinacija pomjerenih pravougaonih impulsa:

$$\delta_{\Delta t}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t}, & |t| < \frac{\Delta t}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\Delta t}{2} \end{cases} \quad (4.2)$$

na sljedeći način:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta_{\Delta t}(t - k\Delta t) \Delta t. \quad (4.3)$$



Slika 4.1 (a) Stepenasta aproksimacija kontinualnog signala. (b-e) Elementi sume (4.1): primjeri pomjerenih pravougaonih impulsa.

Kada  $\Delta t \rightarrow 0$ , jedinični pravougaoni impuls  $\delta_{\Delta t}(t)$  postaje jednak Dirakovoj funkciji  $\delta(t)$ . Razmaci tačaka  $k\Delta t$  na vremenskoj osi postaju beskonačno mali, te  $k\Delta t$  postaje kontinualna varijabla  $\tau$ , a suma (4.3) prelazi u integral. Aproksimacija signala  $\hat{x}(t)$  u tom graničnom slučaju postaje:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \hat{x}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta_{\Delta t}(t - k\Delta t) \Delta t = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (4.4)$$

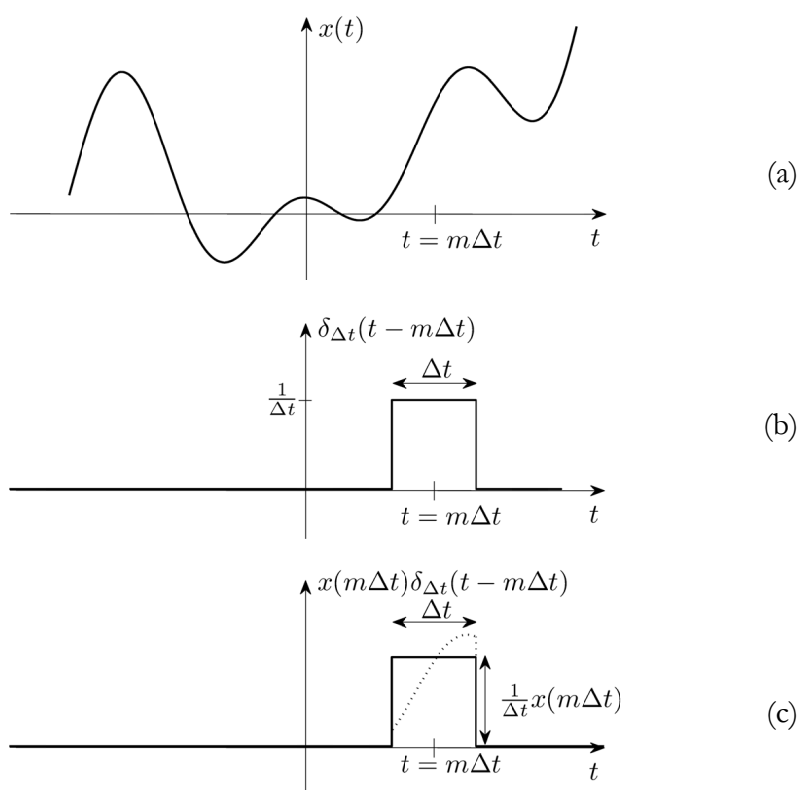
Posmatrajući Sliku 4.1 možemo primjetiti da smanjenjem  $\Delta t$  aproksimacija  $\hat{x}(t)$  teži signalu  $x(t)$ . Pokazaćemo da se pri tome zapravo smanjuje razlika površina koje sa vremenskom osom zaklapaju signal  $x(t)$  i njegova aproksimacija  $\hat{x}(t)$ .

U intervalu vremena  $m\Delta t - \frac{\Delta t}{2} < t < m\Delta t + \frac{\Delta t}{2}$  samo član sume (4.3) za  $k = m$  je različit od nule. To je grafički ilustrovano na Slici 4.2. Primjetimo da pravougaoni impulsi  $\delta_{\Delta t}(t - k\Delta t) \Delta t$  u (4.3) imaju jediničnu amplitudu. Aproksimacija signala  $\hat{x}(t)$  u posmatranom intervalu je konstanta jednaka vrijednosti signala  $x(t)$  u tački  $t = m\Delta t$ :

$$\hat{x}(t) = x(k\Delta t) \delta_{\Delta t}(t - k\Delta t) \Delta t \Big|_{k=m} = x(m\Delta t), \quad m\Delta t - \frac{\Delta t}{2} < t < m\Delta t + \frac{\Delta t}{2}. \quad (4.5)$$

Posmatrajući Sliku 4.2(c) možemo zaključiti da je vrijednost signala u tački  $m\Delta t$  jednaka površini posmatranog pravougaonog impulsa širine  $\Delta t$  i amplitude  $\frac{x(m\Delta t)}{\Delta t}$ . Ako su vrijednosti signala u posmatranom intervalu konačne, u graničnom slučaju, kada  $\Delta t \rightarrow 0$ , površina posmatranog pravougaonog impulsa teži površini koju sa vremenskom osom na posmatranom intervalu zatvara funkcija  $\frac{x(t)}{\Delta t}$ , odnosno njenom integralu:

$$x(m\Delta t) = x(m\Delta t) \delta_{\Delta t}(t - m\Delta t) \Delta t = \frac{1}{\Delta t} \int_{m\Delta t - \frac{\Delta t}{2}}^{m\Delta t + \frac{\Delta t}{2}} x(\tau) d\tau, \quad \Delta t \rightarrow 0. \quad (4.6)$$



Slika 4.2 Grafička interpretacija jednačine (4.3): (a) signal  $x(t)$  proizvoljnog oblika; (b) jedinični pravougaoni impuls pomjeren u tačku  $t = m\Delta t$  i (c) aproksimacija signala u intervalu  $m\Delta t - \frac{\Delta t}{2} < t < m\Delta t + \frac{\Delta t}{2}$ .

Izraz (4.5) se neće promijeniti ako proširimo granice integrala i pri tome pomnožimo podintegralnu funkciju sa pravougaonim impulsom jedinične amplitude  $\delta_{\Delta t}(\tau - m\Delta t)\Delta t$ :

$$x(m\Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta_{\Delta t}(\tau - m\Delta t) \Delta t d\tau, \quad \Delta t \rightarrow 0. \quad (4.7)$$

Kada  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $m\Delta t$  postaje kontinualna varijabla  $t$ . U svakom trenutku vremena vrijedi da je:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(\tau - t) d\tau, \quad (4.8)$$

što je zbog parnosti Dirakove funkcije konačno jednako:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (4.9)$$

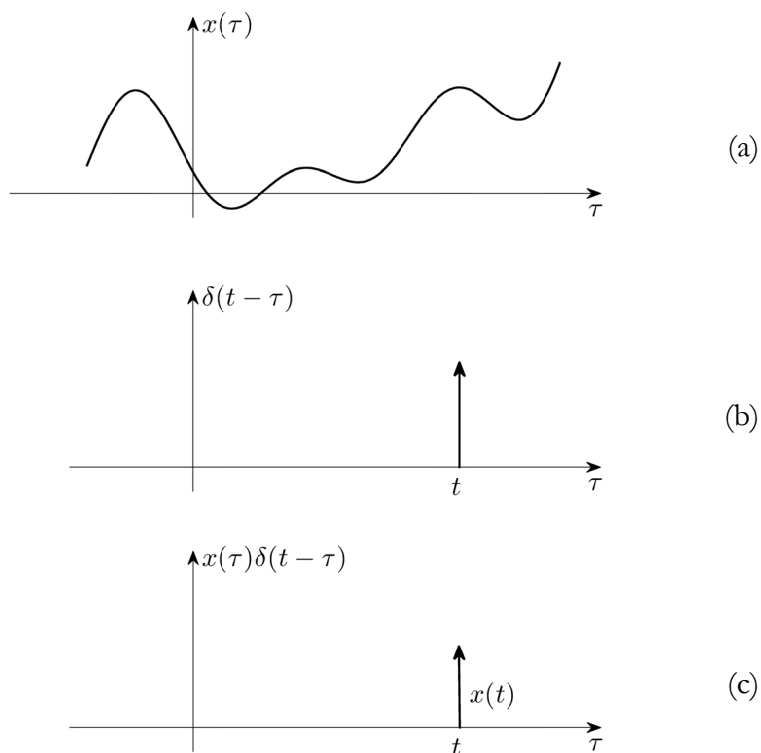
Izraz (4.9) je jednak aproksimaciji signala datoj sa (4.4). Na ovaj način smo pokazali da je  $x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \hat{x}(t)$ , ako signal  $x(t)$  ima konačne vrijednosti, kao i da se smanjivanjem  $\Delta t$  smanjuje razlika površina koje sa vremenskom osom zaklapaju signal i njegova aproksimacija.

Razmatrajući aproksimaciju signala pronašli smo način predstavljanja signala impulsnim funkcijama dat sa (4.9). Jednakost (4.9) nam govori da je signal proizvoljnog oblika moguće izraziti preko integrala jediničnih impulsnih funkcija koje su pomjerene u vremenu i čije su težine (jačine udara) jednake vrijednostima signala u trenucima u koje su pomjerene. Ilustracija ove jednakosti je data na Slici 4.3, gdje je prikazan proizvoljni signal  $x(\tau)$ , jedinična impulsna funkcija  $\delta(t - \tau)$  kao funkcija od  $\tau$  sa fiksnim  $t$  i njihov proizvod.

Jednakost (4.9) smo mogli jednostavnije dokazati poznavajući osobine Dirakove funkcije:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau = x(t). \quad (4.10)$$

Prethodno provedeno šire razmatranje ima za cilj da naglasi interpretaciju signala  $x(t)$  preko jediničnih impulsnih funkcija. Iako sama po sebi ovakva interpretacija signala proizvoljnog oblika nema svrhu, ona je veoma korisna prilikom izvođenja izraza za konvoluciju kao metoda za određivanje odziva na proizvoljnu pobudu.



Slika 4.3 Grafička interpretacija jednačine (4.9): (a) signal  $x(\tau)$  proizvoljnog oblika; (b) pomjerena jedinična impulsna funkcija  $\delta(t-\tau)$  kao funkcija od  $\tau$  sa fiksnim  $t$  i (c) proizvod ova dva signala.

### 4.2.2 Konvolucioni integral

Kao što smo već ranije istakli, cilj nam je da pronađemo odziv LTI sistema na pobudu proizvoljnim signalom. Vidjeli smo da signal proizvoljnog oblika možemo aproksimirati pomoću jediničnih impulsnih funkcija:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta_{\Delta t}(t - k\Delta t) \Delta t, \quad (4.11)$$

te da ova aproksimacija u graničnom slučaju, kada  $\Delta t \rightarrow 0$ , postaje jednaka signalu  $x(t)$ :

$$x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta_{\Delta t}(t - k\Delta t) \Delta t = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (4.12)$$

Pronađimo prvo odziv na aproksimaciju signala  $\hat{x}(t)$ . Označimo sa  $h_{\Delta t}(t)$  odziv na jedinični pravougaoni impuls  $\delta_{\Delta t}(t)$ :

$$h_{\Delta t}(t) = \mathcal{F} \{ \delta_{\Delta t}(t) \}. \quad (4.13)$$

Za vremenski invarijantne sisteme vrijedi da je:

$$h_{\Delta t}(t - k\Delta t) = \mathcal{F}_{TI} \{ \delta_{\Delta t}(t - k\Delta t) \}, \quad (4.14)$$

gdje je sa  $\mathcal{F}_{TI}$  označena transformacija koju unosi vremenski invarijantan sistem.

Osobina superpozicije LTI sistema dopušta nam da odziv na aproksimaciju signala  $\hat{x}(t)$  napišemo u obliku:

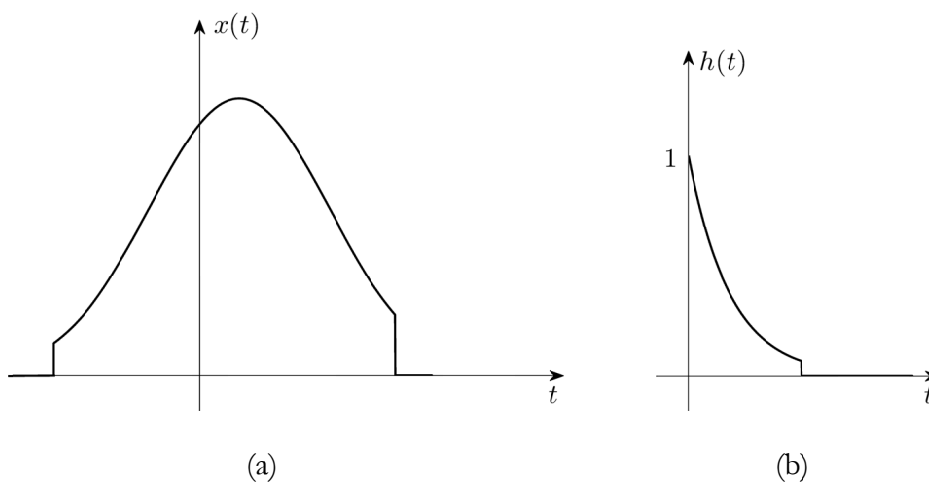
$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= \mathcal{F}_{LTI} \{ \hat{x}(t) \} = \mathcal{F}_{LTI} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta_{\Delta t}(t - k\Delta t) \Delta t \right\} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \mathcal{F}_{LTI} \{ \delta_{\Delta t}(t - k\Delta t) \} \Delta t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) h_{\Delta t}(t - k\Delta t) \Delta t. \end{aligned} \quad (4.15)$$

U graničnom slučaju, kada  $\Delta t \rightarrow 0$ , jedinični pravougaoni impuls  $\delta_{\Delta t}(t)$  postaje jednak Dirakovoj funkciji  $\delta(t)$ , pa stoga odziv na jedinični pravougaoni impuls  $h_{\Delta t}(t)$  postaje jednak impulsnom odzivu  $h(t)$ . Uz to,  $k\Delta t$  postaje kontinualna varijabla  $\tau$  i suma prelazi u integral. Budući da u ovom graničnom slučaju  $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ , odziv na  $\hat{x}(t)$  postaje odziv na  $x(t)$ :

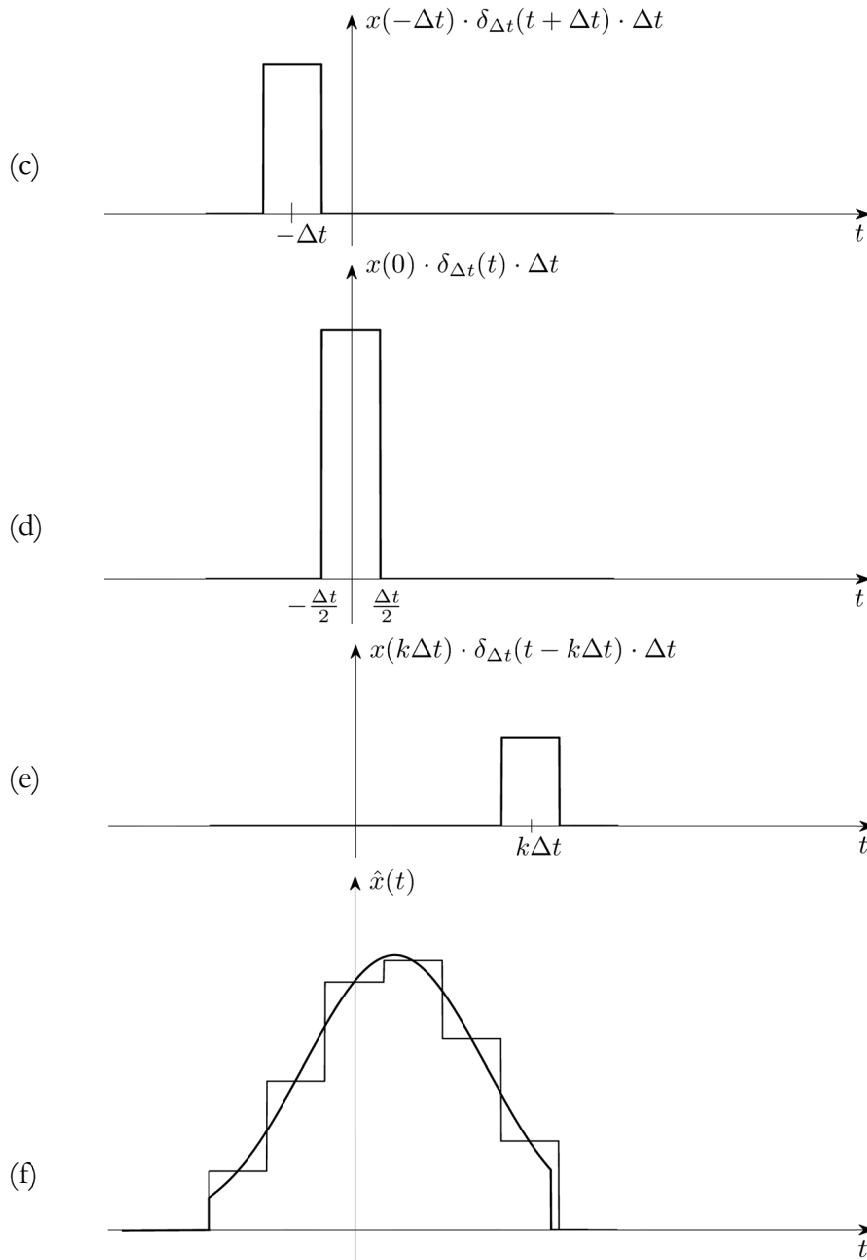


$$\begin{aligned}
 y(t) &= \mathcal{F}_{LTI} \{x(t)\} = \mathcal{F}_{LTI} \left\{ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta_{\Delta t}(t - k\Delta t) \Delta t \right\} = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \cdot \mathcal{F}_{LTI} \{ \delta_{\Delta t}(t - k\Delta t) \} \Delta t = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) h_{\Delta t}(t - k\Delta t) \Delta t = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

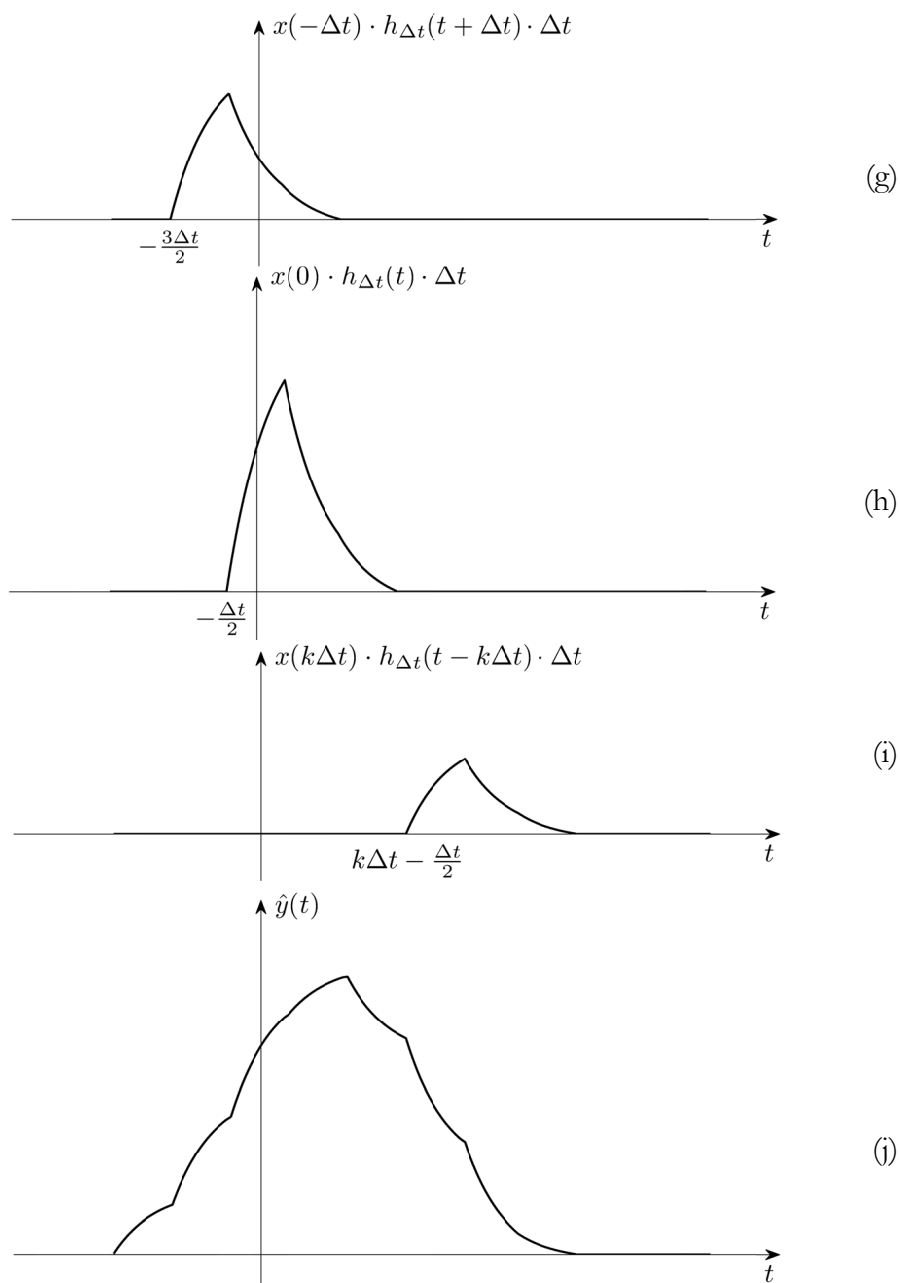
Postupak određivanja odziva na signal proizvoljnog oblika putem odziva na njegovu stepenastu aproksimaciju ilustrovan je na Slici 4.4. Posebno su prikazani odzivi na pojedinačne pravougaone impulse kojima se aproksimira pobudni signal. Aproksimacija odziva jednaka je zbiru tih pojedinačnih odziva.



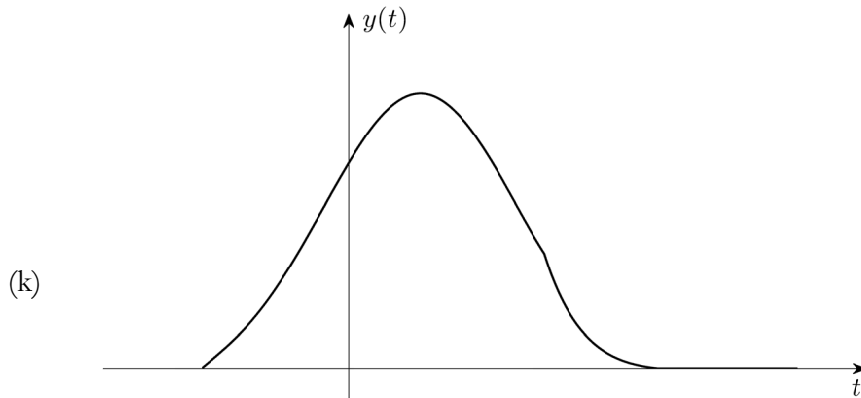
Slika 4.4 Grafička interpretacija određivanja odziva: (a) pobuda  $x(t)$  proizvoljnog oblika i (b) impulsni odziv  $h(t)$  (nastavak na sljedećoj stranici);



Slika 4.4 (nastavak): (c-e) neki od pojedinačnih pravougaonih impulsa kojima se aproksimira pobuda i (f) aproksimacija pobude  $\hat{x}(t)$  (nastavak na sljedećoj stranici);



Slika 4.4 (nastavak): (g-i) odzivi na pojedinačne pravougaone impulse i (j) aproksimativni odziv  $\hat{y}(t)$  (nastavak na sljedećoj stranici);

Slika 4.4 (nastavak): (k) odziv  $y(t)$ .

Dakle, odziv  $y(t)$  linearnog, vremenski invarijantnog sistema na pobudu  $x(t)$  proizvoljnog oblika može se dobiti na osnovu jednačine (4.16). U svom konačnom obliku:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (4.17)$$

ova jednačina je označena kao *konvolucioni integral*.

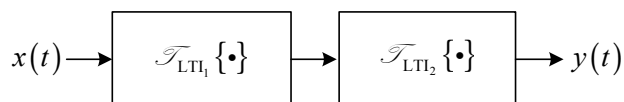
Matematička operacija konvolucije dva signala  $x(t)$  i  $h(t)$  data sa (4.17) se simbolički označava sa:

$$y(t) = x(t) * h(t). \quad (4.18)$$

Konvolucija je komutativna, asocijativna i distributivna operacija. Ove osobine koje slijede direktno iz definicije konvolucije preko integrala olakšavaju analizu složenih sistema.

Osobina *komutativnosti* nam govori da ulazni signal i impulsni odziv mogu zamijeniti uloge, a da se izlazni signal ne promijeni:

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t). \quad (4.19)$$



Slika 4.5 Blok šema kaskadne veze dva LTI sistema.

Osobinu asocijativnosti možemo koristiti za pronalaženje impulsnog odziva kaskadne veze LTI sistema. Posmatrajmo kaskadnu vezu dva LTI sistema sa impulsnim odzivima  $h_1(t)$  i  $h_2(t)$ , prikazanu na Slici 4.5. Za pojedinačne sisteme vrijedi da je  $y_1(t) = x_1(t) * h_1(t)$  i  $y_2(t) = x_2(t) * h_2(t)$ . Kako je ulaz u prvi sistem jednak ulazu u cijeli sistem  $x_1(t) = x(t)$ , ulaz u drugi sistem jednak izlazu iz prvog sistema  $x_2(t) = y_1(t)$ , a izlaz iz cijelog sistema jednak izlazu iz drugog sistema  $y(t) = y_2(t)$ , slijedi:

$$y(t) = y_2(t) = x_2(t) * h_2(t) = y_1(t) * h_2(t) = [x_1(t) * h_1(t)] * h_2(t). \quad (4.20)$$

Osobina *asocijativnosti* konvolucije nam omogućava promjenu redoslijeda operacija, tako da je:

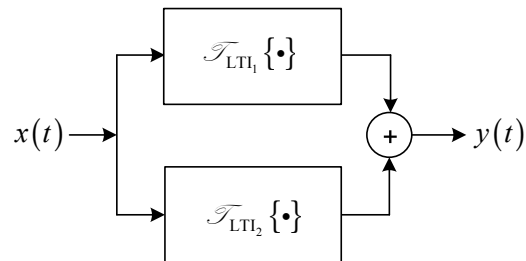
$$y(t) = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]. \quad (4.21)$$

Iz (4.21) zaključujemo da je impulsni odziv kaskadne veze dva LTI sistema jednak konvoluciji njihovih impulsnih odziva:

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t). \quad (4.22)$$

Posmatrajmo sada paralelnu vezu dva LTI sistema sa impulsnim odzivima  $h_1(t)$  i  $h_2(t)$ , prikazanu na Slici 4.6. Kod paralelne veze se isti pobudni signal istovremeno dovodi na ulaz oba sistema  $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$ , dok je izlaz cijelog sistema jednak zbiru izlaza pojedinačnih sistema  $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ . Slijedi da je odziv paralelne veze jednak:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = x_1(t) * h_1(t) + x_2(t) * h_2(t). \quad (4.23)$$



Slika 4.6 Blok šema paralelne veze dva LTI sistema.

Na osnovu osobine *distributivnosti* konvolucije, iz (4.23) slijedi da je:

$$y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)], \quad (4.24)$$

te je impulsni odziv paralelne veze dva LTI sistema jednak zbiru impulsnih odziva pojedinačnih sistema koji čine paralelnu konfiguraciju:

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t). \quad (4.25)$$

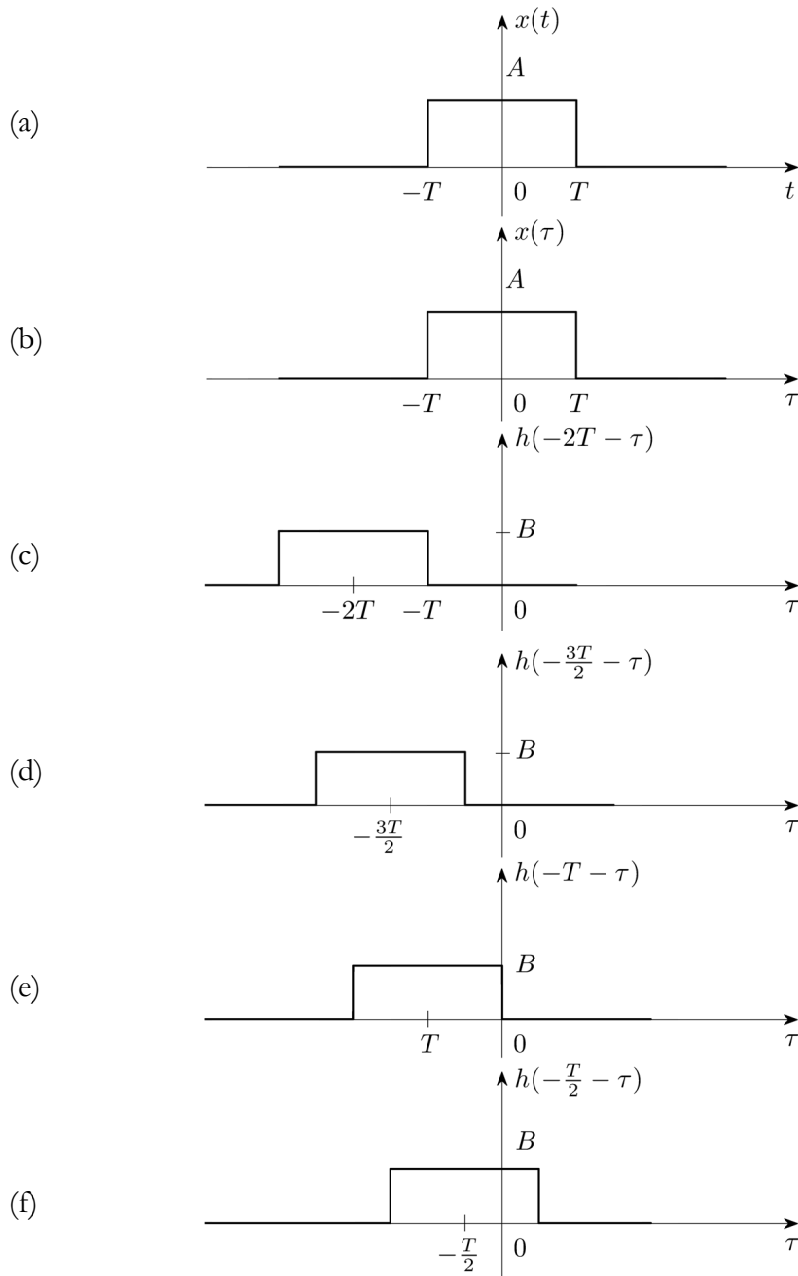
### 4.2.3 Grafičko rješavanje konvolucije

Posmatrajući konvolucionni integral:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad (4.26)$$

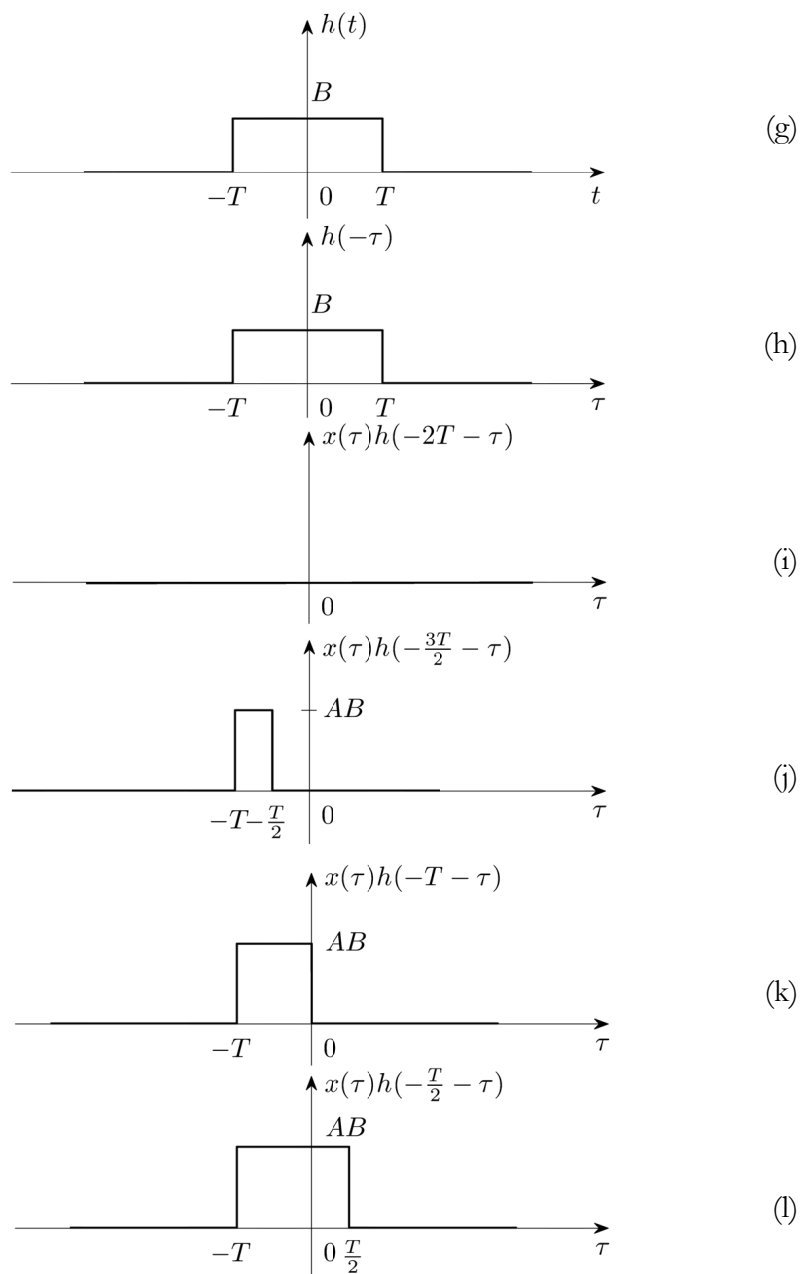
zaključujemo da je u svakom trenutku  $t$  signal  $y(t)$  jednak težinskom integralu signala  $x(\tau)$ , pri čemu su težine jednake  $h(t-\tau)$ . Kako bismo došli do grafičkog metoda za određivanje konvolucije za specifičnu vrijednost varijable  $t$ , prvo generišimo signal  $h(t-\tau)$  iz signala  $h(\tau)$ , koji je funkcija

nezavisne varijable  $\tau$ , tako što ćemo uraditi refleksiju signala  $h(\tau)$  oko ishodišta i pomjeriti ga udesno za  $t$  ako je  $t > 0$ , ili ulijevo za  $|t|$  ako je  $t < 0$ . Podintegralni signal dobijemo množenjem  $x(\tau)$  sa  $h(t-\tau)$  za različite vrijednosti  $t$ . Za jednu specifičnu vrijednost nezavisne varijable  $t$ , konvolucija  $y(t)$  se dobije integrirajući proizvod  $x(\tau)h(t-\tau)$  u granicama od  $-\infty$  do  $\infty$ , što u geometrijskom smislu znači računajući površinu ispod proizvoda  $x(\tau)h(t-\tau)$ . Možemo zamisliti kao da signal  $h(t-\tau)$  "klizi" po  $\tau$  osi i pri tome gledamo koliko je njegovo preklapanje sa  $x(\tau)$ . Konvolucija je mjera tog preklapanja izražena površinom koju sa  $\tau$  osom zaklapa proizvod  $x(\tau)h(t-\tau)$ . U slučajevima kada se radi sa jednostavnim signalima, površina se lako odredi geometrijskim metodima. Postupak je potrebno ponoviti za svaku vrijednost nezavisne varijable  $t$ , odnosno za svaki vremenski trenutak u kom želimo da odredimo signal odziva. Pri izboru tačaka u kojima će se računati konvolucija potrebno je prekriti čitav opseg u kome je proizvod  $x(\tau)h(t-\tau)$  različit od nule, što za signale konačnog trajanja znači u početnom koraku pomjeriti reflektovani signal dovoljno ulijevo da se izbjegne preklapanje sa signalom  $x(\tau)$ , a sa računanjem prestati kada prilikom pomjeranja reflektovanog signala udesno prestane preklapanje tih signala. Ukoliko trajanje bar jednog od signala koji učestvuju u konvoluciji nije konačno, konvolucija se računa za sve vrijednosti nezavisne varijable  $t$  od  $-\infty$  do  $\infty$ . Postupak grafičkog rješavanja konvolucije ilustrovan je na Slici 4.7 na primjeru konvolucije signala  $x(t)$  i impulsnog odziva  $h(t)$ . Oba signala su u obliku pravougaonog impulsa, ali različitih amplituda. Rezultati konvolucije u tačkama u kojima se vrši računanje su na rezultujućoj Slici 4.7(z) naglašeni samo radi boljeg razumijevanja.

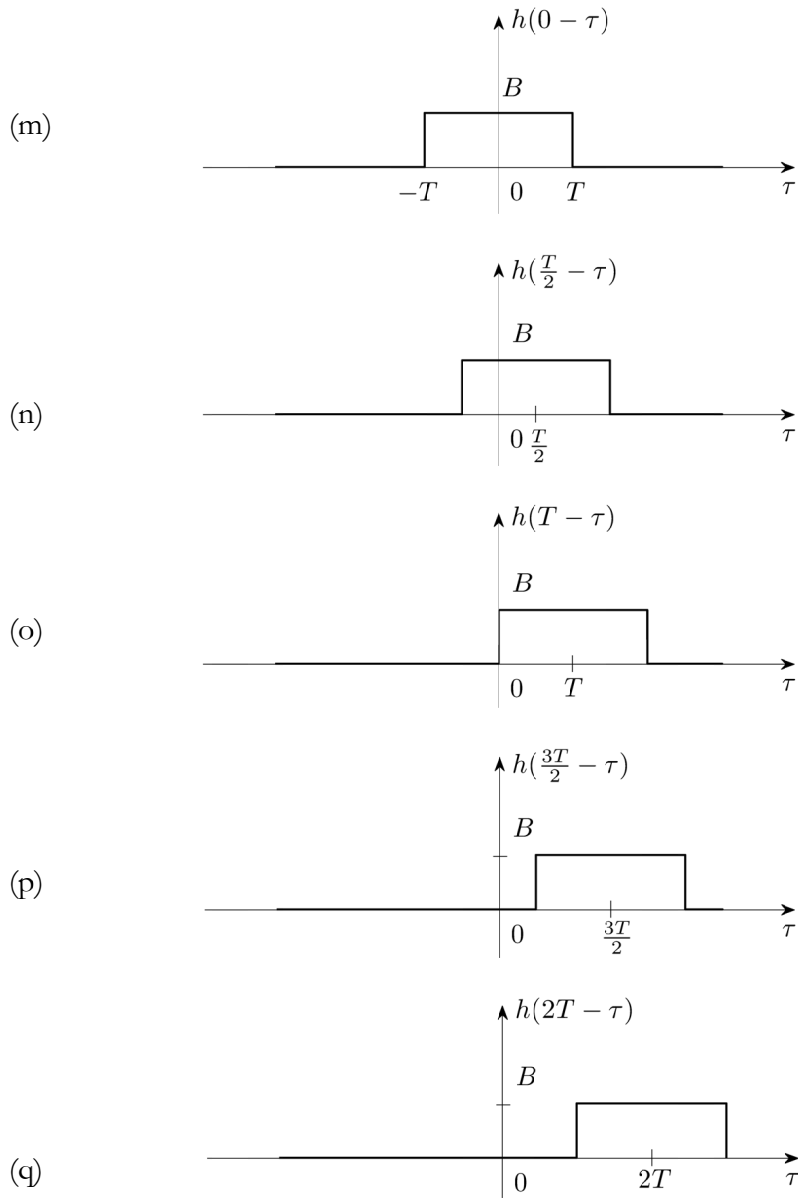


Slika 4.7 Ilustracija grafičkog rješavanja konvolucije: (a) signal  $x(t)$ ; (b) isti signal prikazan na  $\tau$  osi i (c-f) pomjereni reflektovani impulsni odzivi (nastavak na sljedećoj stranici);

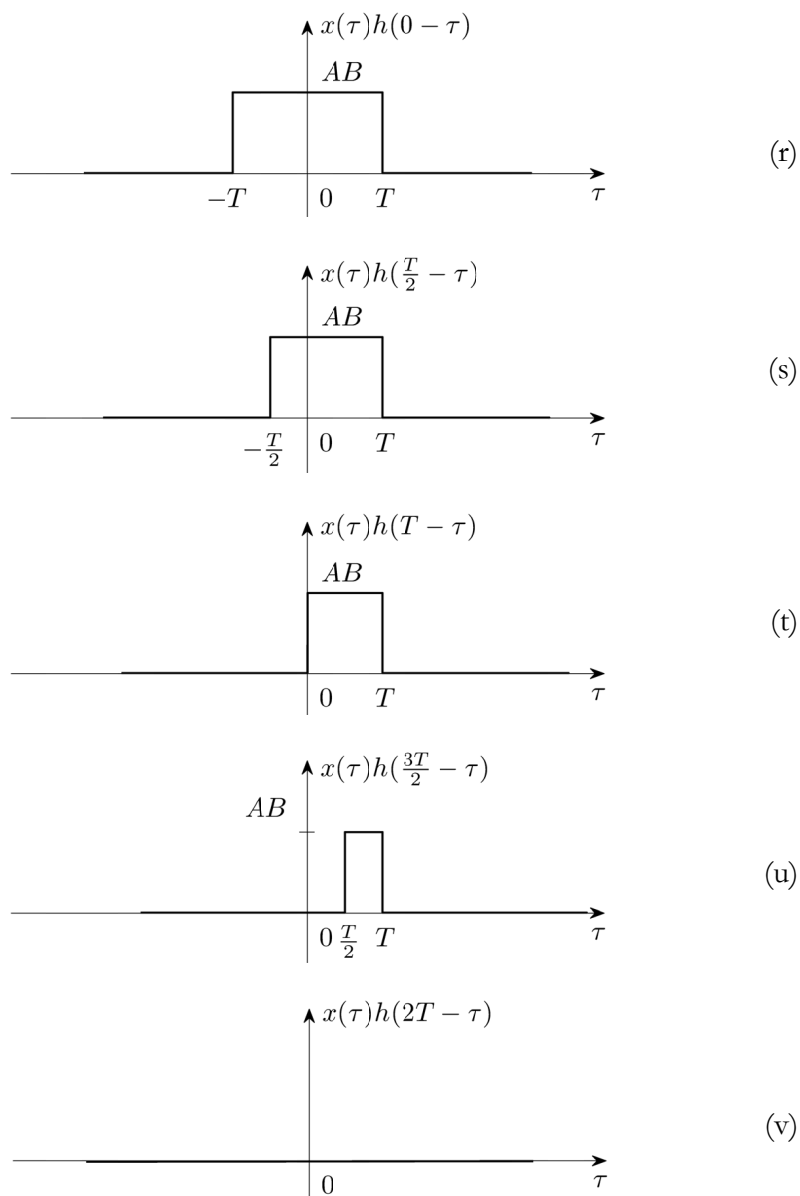




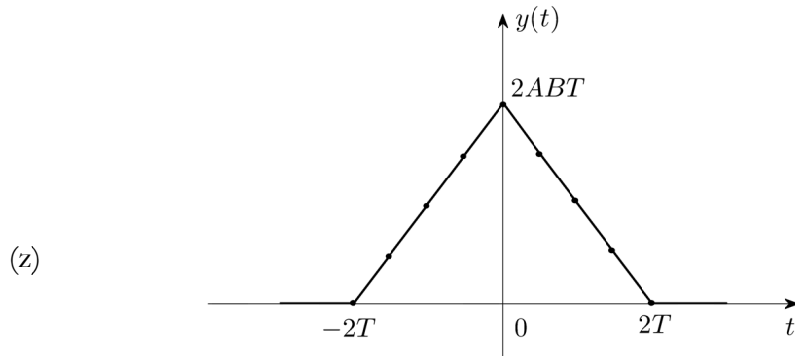
Slika 4.7 (nastavak): (g) impulsni odziv  $h(t)$ ; (h) reflektovan impulsni odziv prikazan na  $\tau$  osi i (i-l) proizvodi signala  $x(\tau)$  i pomjerenih reflektovanih impulsnih odziva (nastavak na sljedećoj stranici);



Slika 4.7 (nastavak): (m-q) pomjereni reflektovani impulsni odzivi (nastavak na sljedećoj stranici);



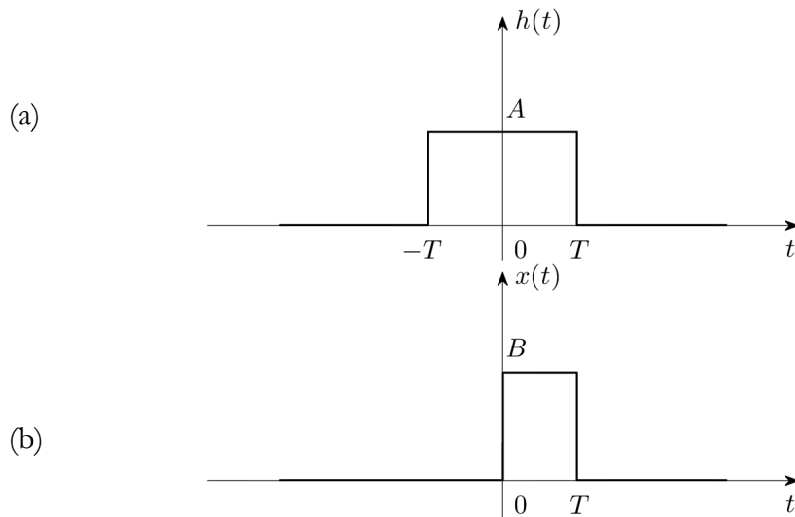
Slika 4.7 (nastavak): (r-v) proizvodi signala  $x(\tau)$  i pomjerenih reflektovanih impulsnih odziva (nastavak na sljedećoj stranici);



Slika 4.7 (nastavak): (z) rezultat konvolucije.

Primjer 4.1:

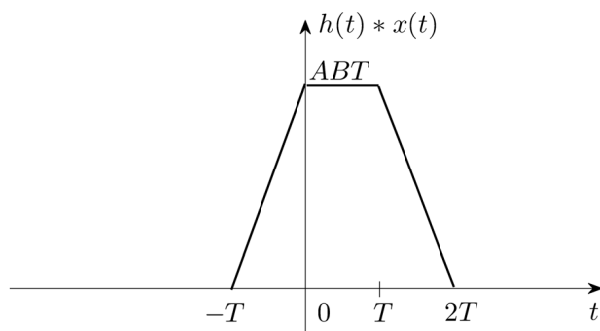
Grafičkim putem odrediti odziv LTI sistema sa impulsnim odzivom datim na Slici 4.8(a) na pobudu prikazanu na Slici 4.8(b).



Slika 4.8 (a) Impulsni odziv LTI sistema i (b) pobuda.

Rješenje:

Odziv LTI sistema je dat konvolucijom impulsnog odziva i pobudnog signala. Ako se grafičkom rješavanju konvolucije u ovom zadatku pristupi tako da se reflektuje pobudni signal, taj signal se nakon reflektovanja pomjera ulijevo dok ne prestane preklapanje sa impulsnim odzivom. Preklapanje sa impulsnim odzivom počinje kada se prednja ivica reflektovanog pobudnog signala nađe u tački  $-T$ , što odgovara signalu  $x(-T-\tau)$ . Za svako  $t < -T$  nema preklapanja impulsnog odziva sa pomjerenim reflektovanim pobudnim signalom, pa je rezultat konvolucije jednak nuli. U intervalu  $-T < t < 0$  površina ispod proizvoda  $h(\tau)x(t-\tau)$  raste jer se sa porastom vremena  $t$  povećava širina intervala na kom je taj proizvod različit od nule. Međutim, u intervalu  $0 < t < T$  površina ostaje konstantna jer se za svako  $t$  iz tog intervala signal  $x(t-\tau)$  u potpunosti preklapa sa  $h(\tau)$ . Tek za  $t > T$  preklapanje se postepeno smanjuje i potpuno prestaje za  $t = 2T$ . Rezultat konvolucije je prikazan na Slici 4.9. Primjetimo da se odziv LTI sistema sa impulsnim odzivom koji nije jednak nuli za  $t < 0$  pojavio prije pobude.



Slika 4.9 Konvolucija signala sa Slike 4.8.

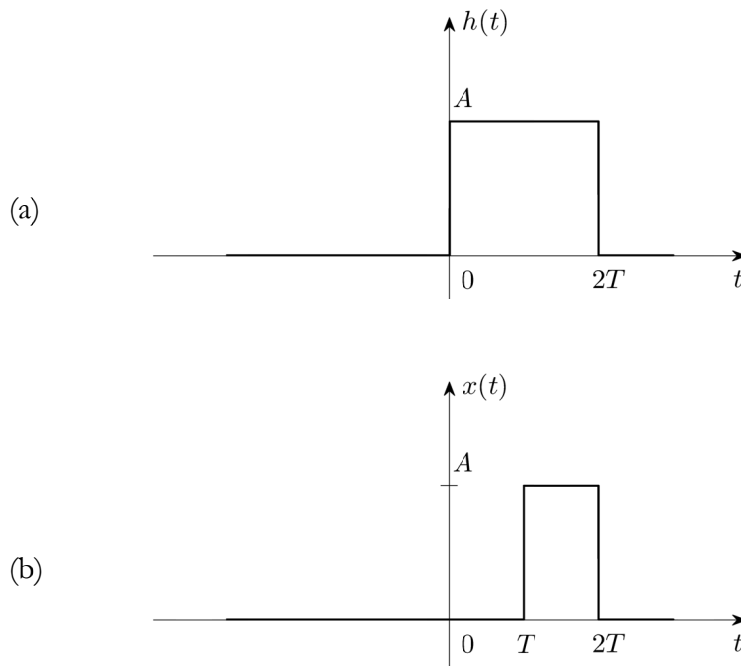
□

Primjer 4.2:

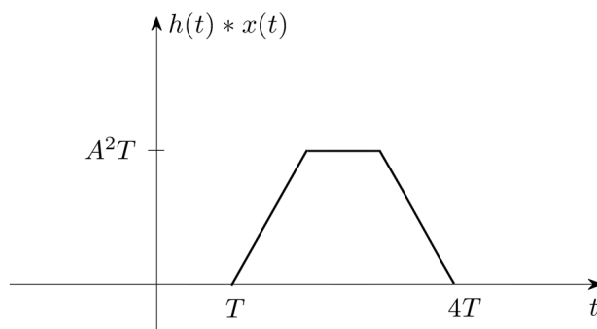
Impulsni odziv LTI sistema dat je na Slici 4.10(a). Grafičkim putem odrediti odziv na pobudni signal prikazan na Slici 4.10(b).

*Rješenje:*

Istim postupkom kao u Primjeru 4.1 dobijamo signal odziva dat na Slici 4.11. Budući da je impulsni odziv LTI sistema jednak nuli za  $t < 0$ , odziv počinje od trenutka pobuđivanja sistema.



Slika 4.10 (a) Impulsni odziv kauzalnog LTI sistema i (b) kauzalna pobuda.

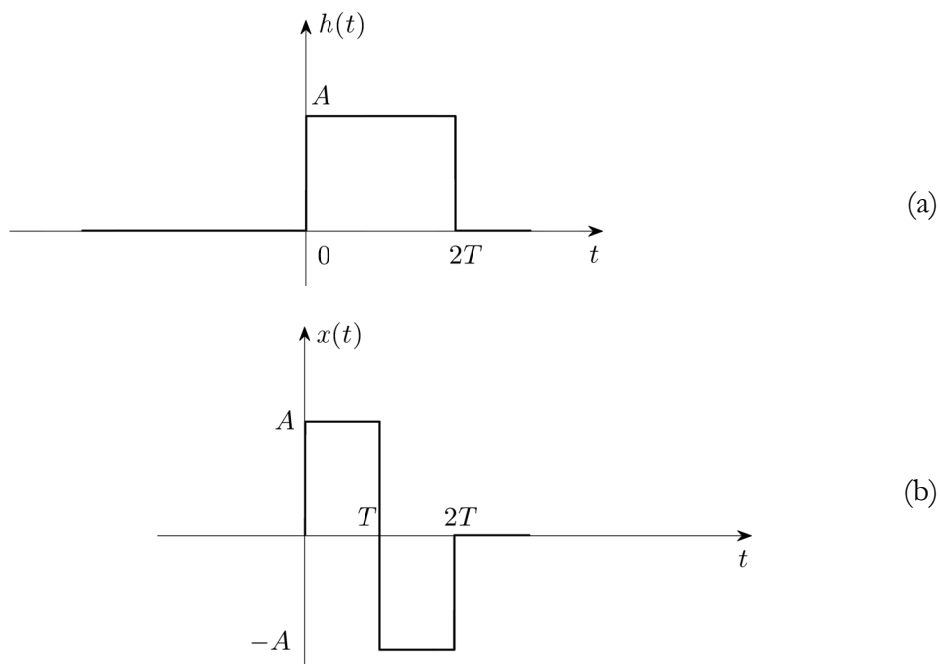


Slika 4.11 Konvolucija signala sa Slike 4.10.

□

Primjer 4.3:

Za kauzalni LTI sistem dat na Slici 4.12(a) grafičkim putem odrediti odziv na pobudni signal prikazan na Slici 4.12(b).

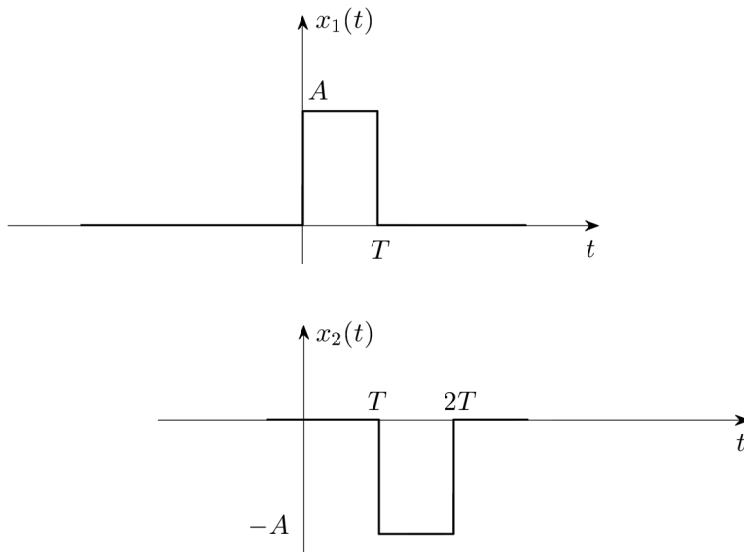


Slika 4.12 (a) Impulsni odziv kauzalnog LTI sistema i (b) pobudni signal.

*Rješenje:*

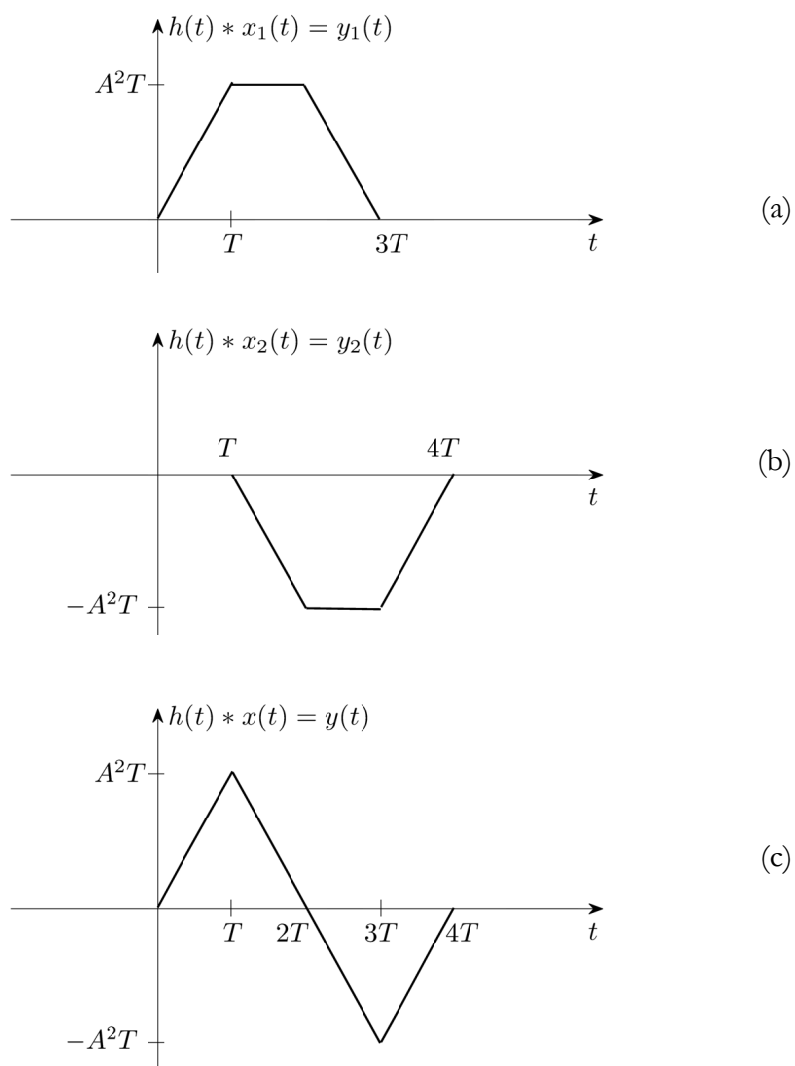
Primjetimo da se pobudni signal može razložiti na elementarne signale  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  kao na Slici 4.13. Potražićemo odziv sistema koristeći princip superpozicije. Grafičkim putem odredimo pojedinačne konvolucije impulsnog odziva sa pravougaonim impulsima sa Slike 4.13. Rezultati ovih konvolucija su dati na Slici 4.14(a,b). Primjetimo da je pravougaoni impuls  $x_2(t)$  pomjerena verzija pravougaonog impulsa  $x_1(t)$  pomnožena sa -1, tj.  $x_2(t) = -x_1(t - T)$ .

Poznavajući konvoluciju  $y_1(t) = h(t) * x_1(t)$ , konvoluciju impulsnog odziva i pravougaonog impulsa  $x_2(t)$  smo mogli dobiti koristeći princip linearnosti i vremenske invarijantnosti kao  $y_2(t) = h(t) * x_2(t) = -y_1(t - T)$ . Na Slici 4.14(c) dat je rezultat konvolucije kao  $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ .



Slika 4.13 Razlaganje signala  $x(t)$  na pravougaone impulse  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$ .





Slika 4.14 (a) Konvolucija  $y_1(t) = h(t) * x_1(t)$ ; (b) konvolucija  $y_2(t) = h(t) * x_2(t)$  i (c) konvolucija  $y(t) = h(t) * x(t)$ .

□

U analizi i obradi signala posebno mjesto zauzima konvolucija proizvoljnog signala sa Dirakovim impulsima. Posmatrajmo konvoluciju signala  $x(t)$  proizvoljnog oblika sa pomjerenim Dirakovim impulsom  $\delta(t-t_0)$ . Na osnovu definicionog izraza za konvoluciju:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau, \quad (4.27)$$

dobijamo da je:

$$y(t) = x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-t_0-\tau) d\tau. \quad (4.28)$$

Po svojstvu odabiranja Dirakove funkcije znamo da je:

$$x(\tau) \delta(t-t_0-\tau) = x(t-t_0) \delta(t-t_0-\tau), \quad (4.29)$$

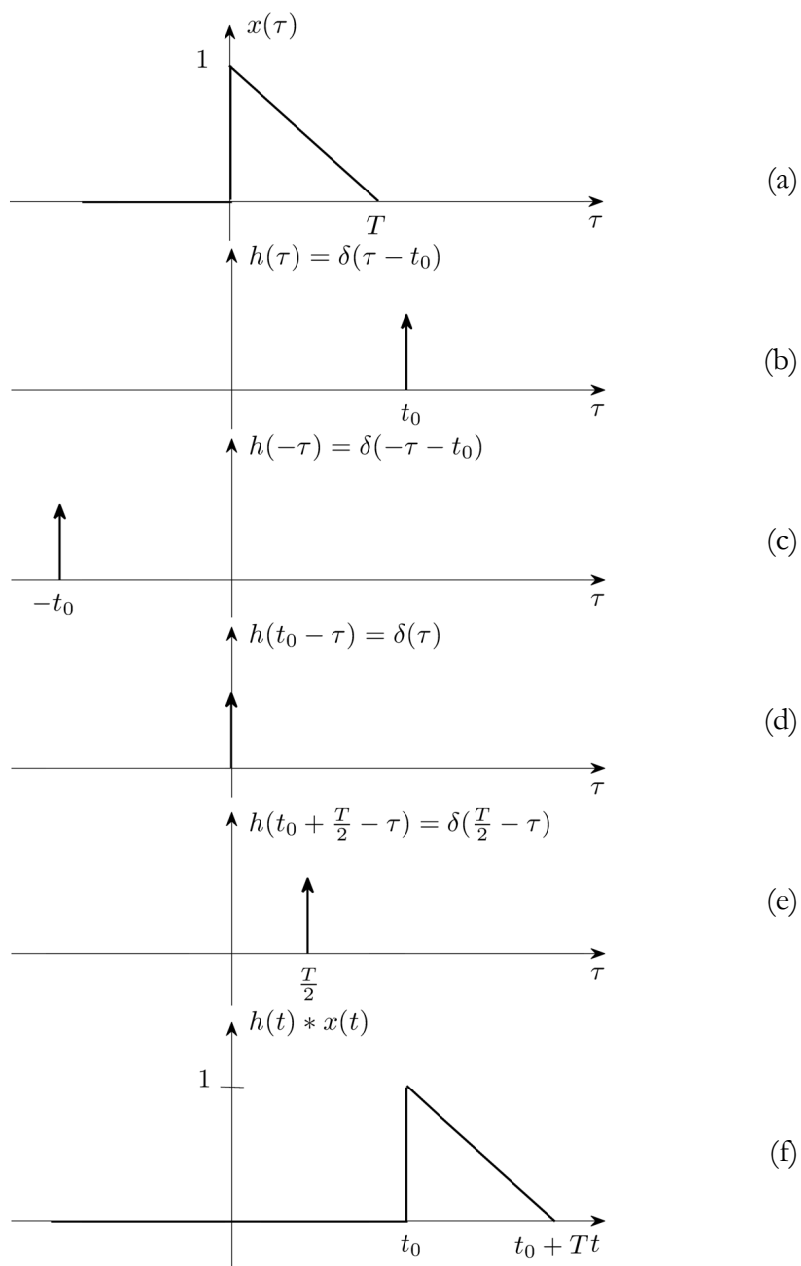
te je konvolucija (4.28) jednaka:

$$y(t) = x(t-t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0-\tau) d\tau. \quad (4.30)$$

Integral Dirakovog impulsa od  $-\infty$  do  $\infty$  jednak je jedinici, neovisno od toga u koju tačku vremena je Dirakov impuls pomjeren. Dakle, konvolucija signala  $x(t)$  proizvoljnog oblika sa Dirakovim impulsom pomjerenim u tačku  $t_0$  jednaka je signalu  $x(t)$ , pomjerenom u tačku  $t_0$ :

$$y(t) = x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0). \quad (4.31)$$

Na Slici 4.15 ilustrovano je grafičko rješavanje konvolucije proizvoljnog signala  $x(t)$  sa pomjerenim Dirakovim impulsom  $h(t) = \delta(t-t_0)$ . Prilikom formiranja proizvoda  $x(\tau)h(t-\tau)$  za svaku vrijednost nezavisne varijable  $t$  dobijamo proizvod  $x(\tau)\delta(t-t_0-\tau)$ , koji je po svojstvu odabiranja Dirakove funkcije jednak  $x(t-t_0)\delta(t-t_0-\tau)$ . Konvolucija u tački  $t$  je jednaka površini



Slika 4.15 Konvolucija signala proizvoljnog oblika i pomjerenog Dirakovog impulsa: (a) signal proizvoljnog oblika i (b) impulsni odziv prikazani na  $\tau$  osi; (c) reflektovan impulsni odziv; (d,e) pomjereni reflektovani impulsni odzivi i (f) rezultat konvolucije.

koju proizvod  $x(t-t_0)\delta(t-t_0-\tau)$  zatvara sa  $\tau$  osom. Ta površina je jačina udara Dirakove funkcije i iznosi  $x(t-t_0)$ , te je  $y(t) = x(t-t_0)$ .

Posmatrajmo sada konvoluciju proizvoljnog signala  $x(t)$  sa periodično ponovljenim Dirakovim impulsima  $\tilde{\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$ . Period signala  $\tilde{\delta}(t)$  smo označili sa  $T$ . Znajući da je  $x(t) * \delta(t-kT) = x(t-kT)$  i da je konvolucija linearni operator, dobijamo da je:

$$\tilde{x}(t) = x(t) * \tilde{\delta}(t) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) * \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kT). \quad (4.32)$$

Dakle, konvolucijom proizvoljnog signala  $x(t)$  sa periodično ponovljenim Dirakovim impulsima dobijamo njegovo periodično proširenje:

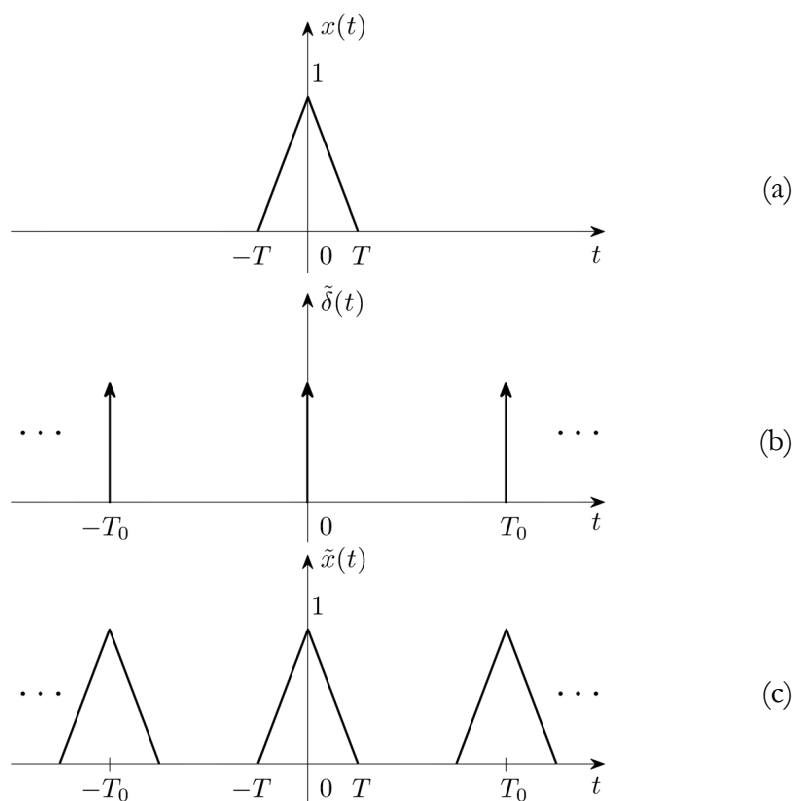
$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kT). \quad (4.33)$$

Za ilustraciju je na Slici 4.16 prikazana konvolucija trougaonog impulsa sa periodično ponovljenim Dirakovim impulsima. Rezultat te konvolucije su periodično ponovljeni trougaoni impulsi sa istim periodom.

### 4.3 Jedinični odskočni odziv LTI sistema

Osim impulsnim odzivom, sistem je potpuno određen ako poznajemo jedinični odskočni odziv, tj. odziv na jediničnu odskočnu funkciju  $u(t)$ . Koristeći konvolucioni integral, jedinični odskočni odziv  $a(t)$  dobijamo kao:

$$a(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} 1 \cdot h(t-\tau) d\tau. \quad (4.34)$$



Slika 4.16 Konvolucija signala sa periodično ponovljenim Dirakovim impulsima: (a) signal  $x(t)$ ; (b) povorka Dirakovih impulsa i (c) rezultat konvolucije.

Za kauzalne sisteme je  $h(t-\tau)=0$  za  $\tau > t$ , pa gornja granica integrala, umjesto  $\infty$ , postaje  $t$ :

$$a(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau. \quad (4.35)$$

Dakle, jedinični odskočni odziv je jednak integralu impulsnog odziva, dok se impulsni odziv može pronaći kao izvod jediničnog odskočnog odziva:

$$h(t) = \frac{da(t)}{dt}. \quad (4.36)$$

## 4.4 Osobine LTI sistema

Vidjeli smo da se odziv kontinualnog LTI sistema na proizvoljnu pobudu može dobiti konvolucijom ulaznog signala i impulsnog odziva. Stoga možemo reći da je kontinualni LTI sistem u potpunosti okarakterisan svojim impulsnim odzivom  $h(t)$ . Osnovne osobine sistema, koje smo analizirali u Glavi 3, sada ćemo posmatrati pod uslovom da je sistem linearan i vremenski invarijantan.

### 4.4.1 LTI sistemi bez memorije

Podsjetimo se da je sistem bez memorije onaj sistem kod koga izlaz u nekom trenutku zavisi od vrijednosti ulaza samo u tom trenutku. Jedini način da ovo bude tačno za LTI sisteme je da sistem bude opisan sa:

$$y(t) = Kx(t). \quad (4.37)$$

Impulсни odziv se definiše kao odziv sistema na pobudni signal u vidu Dirakovog impulsa  $x(t) = \delta(t)$ , te je za LTI sisteme bez memorije impulсни odziv oblika:

$$h(t) = K\delta(t). \quad (4.38)$$

Na izlazu sistema bez memorije signal može biti samo pojačan ili oslabljen u odnosu na ulazni signal. Za  $K = 1$  radi se o sistemu kod koga je impulсни odziv  $h(t) = \delta(t)$ , te je signal na izlazu ovog LTI sistema jednak signalu na njegovom ulazu. Bilo koji LTI sistem sa drugačijim impulsnim odzivom je LTI sistem sa memorijom.

### 4.4.2 Invertibilnost LTI sistema

Posmatrajmo LTI sistem sa impulsnim odzivom  $h(t)$ . Napomenimo da je sistem po definiciji invertibilan ako je moguće pronaći inverzni sistem koji, kad

se veže kaskadno sa originalnim sistemom, formira takav složeni sistem na čijem je izlazu odziv jednak ulaznom signalu.

Ako sa  $h_i(t)$  označimo impulsni odziv inverznog sistema, da bi LTI sistem bio invertibilan mora da vrijedi:

$$h(t) * h_i(t) = \delta(t). \quad (4.39)$$

Budući da je pod ovim uslovom impulsni odziv kaskadne veze Dirakov impuls:

$$h_k(t) = h(t) * h_i(t) = \delta(t), \quad (4.40)$$

a znamo da je konvolucija proizvoljnog signala sa Dirakovim impulsom jednaka tom signalu, zaključujemo da je odziv kaskadne veze jednak signalu na ulazu u kaskadnu vezu sistema, koji je istovremeno ulazni signal u originalni sistem sa impulsnim odzivom  $h(t)$ .

### 4.4.3 Kauzalnost LTI sistema

Kada smo uvodili koncept kauzalnosti rekli smo da je sistem kauzalan ako odziv zavisi samo od trenutne i prošlih vrijednosti signala na ulazu u sistem. Zbog toga kod kauzalnih LTI sistema gornja granica konvolucionog integrala:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau, \quad (4.41)$$

ne smije da bude veća od vrijednosti nezavisne varijable  $t$  za koju se računa vrijednost odziva, jer bi u suprotnom u računanju odziva učestvovala i vrijednosti pobudnog signala  $x(\tau)$  za  $\tau > t$ , te je:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau. \quad (4.42)$$

Smjenom  $t - \tau \rightarrow \tau$  integral (4.42) se svodi na:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau. \quad (4.43)$$

Zaključujemo da će opšti izraz za konvoluciju:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau, \quad (4.44)$$

koji je ekvivalentan sa (4.41), postati jednak (4.43) samo ako je  $h(t)=0$  za  $t < 0$ , te je uslov kauzalnosti kontinualnih LTI sistema da njihov impulsni odziv bude jednak nuli za  $t < 0$ .

#### 4.4.4 Stabilnost LTI sistema

Sistem je stabilan ako ograničen pobudni signal proizvodi ograničen signal odziva. Da bismo odredili uslove pod kojima je LTI sistem stabilan, posmatraćemo LTI sistem sa impulsnim odzivom  $h(t)$  na koji djeluje ograničen pobudni signal. Kad kažemo da je signal ograničen onda postoji neka pozitivna konstanta  $B < \infty$  za koju je  $|x(t)| < B, \forall t$ . Tada je:

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau \leq B \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau. \quad (4.45)$$

Prema tome, signal odziva će biti ograničen i kontinualni LTI sistem će biti stabilan ako je njegov impulsni odziv apsolutno integrabilan:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty. \quad (4.46)$$

Kao primjer stabilnog LTI sistema možemo navesti sistem čija je uloga samo da zakasni ulazni signal, pa je njegov impulsni odziv  $h(t) = \delta(t-t_0)$ . Određujući da li je sistem stabilan ispitujemo apsolutnu integrabilnost impulsnog odziva:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |\delta(\tau-t_0)|d\tau = 1. \quad (4.47)$$



Vidimo da je impulsni odziv ovog LTI sistema apsolutno integrabilan pa je sistem stabilan, što je bilo i za očekivati jer je odziv ovog sistema na bilo koju ograničenu pobudu jednak pomjerenoj verziji pobude, dakle ograničen.

Posmatrajmo sada sistem opisan sa:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau, \quad (4.48)$$

koji nazivamo integrator. Da bismo pronašli impulsni odziv sistema pretpostavimo da je  $x(t) = \delta(t)$ . Tada je odziv jednak impulsnom odzivu, što je u ovom konkretnom slučaju jedinična odskočna funkcija:

$$y(t) = h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t). \quad (4.49)$$

Ispitujući apsolutnu integrabilnost impulsnog odziva dobijamo beskonačnu vrijednost, jer je integral jedinične odskočne funkcije signal nagiba  $r(t)$  koji beskonačno raste sa porastom vremena:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |u(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} 1 \cdot d\tau = \infty, \quad (4.50)$$

te zaključujemo da se radi o nestabilnom LTI sistemu.

## 4.5 Opis LTI sistema diferencijalnim jednačinama

U cilju opisa sistema potrebno je fizičkim sistemima pridružiti parametre i varijable relevantne za njegovo ponašanje, te uspostaviti relacije između njih. Veze između parametara i varijabli sistema, kao i relacije koje povezuju ulazne i izlazne signale, određuju se na osnovu prirodnih zakona ili eksperimentalno. U realnim fizičkim sistemima za varijable biramo mjerljive veličine.

Vidjeli smo da je kod LTI sistema odziv dat konvolucionim integralom. Dakle, relacije između ulaznih i izlaznih signala u sistemu se mogu opisati integralno-diferencijalnim jednačinama. U slučaju da signali u sistemu zavise

samo od jedne nezavisne varijable (vremena) to su obične diferencijalne jednačine. Sistemi čije varijable zavise od više nezavisnih varijabli (npr. mijenjaju se i u vremenu i u prostoru), opisuju se parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Kod LTI sistema bez memorije diferencijalne jednačine se svode na algebarske, jer je kod ovih sistema  $y(t) = Kx(t)$ .

### 4.5.1 Jednačine stanja

Pretpostavimo da je za opis ponašanja nekog sistema dovoljno poznavanje  $n$  fizičkih veličina koje ćemo označiti kao *varijable stanja*. U tom slučaju su sve ostale veličine u sistemu, izuzev ulaznih signala, *zavisne varijable*. Pretpostavimo da sistem može da bude pobuđen sa  $m$  ulaznih signala (*ulaznih varijabli*) i da ima  $l$  izlaznih signala, odnosno *izlaznih varijabli*. Vektor varijabli stanja  $[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$  ćemo označiti kao vektor stanja  $\mathbf{x}(t)$ , dok ćemo vektore ulaznih  $[e_1(t), e_2(t), \dots, e_m(t)]^T$  i izlaznih signala  $[y_1(t), y_2(t), \dots, y_l(t)]^T$  označiti sa  $\mathbf{e}(t)$  i  $\mathbf{y}(t)$ , respektivno. Svaki od elemenata ovih vektora je funkcija vremena kao nezavisne varijable. Sa  $T$  su označeni transponovani vektori.

Relacije koje povezuju varijable stanja i ulazne varijable opisuju se skupom simultanih diferencijalnih jednačina prvog reda, koje se označavaju kao sistem *jednačina stanja*. U matricnoj formi sistem jednačina stanja u vremenskom domenu ima oblik:

$$D\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{e}(t), \quad (4.51)$$

pri čemu operator  $D$  označava prvu derivaciju, pa je  $D\mathbf{x}(t)$  vektor prvih izvoda varijabli stanja,  $\mathbf{A}$  kvadratna matrica stanja i  $\mathbf{B}$  pravougaona matrica koeficijenata uz ulazne signale.

Izlazne varijable sistema su određene matricnom jednačinom:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{e}(t), \quad (4.52)$$

gdje su  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{D}$  matrice koje povezuju izlazne varijable sa varijablama stanja i ulaznim varijablama. Elementi matrica  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{D}$  zavise od parametara i

strukturne šeme sistema. Ukoliko se radi o vremenski invarijantnim sistemima, elementi matrica **A**, **B**, **C** i **D** se ne mijenjaju u toku vremena. Ako je neki od elemenata ovih matrica funkcija ulaznog ili izlaznog signala, onda se radi o nelinearnim sistemima.

### 4.5.2 Opis LTI sistema diferencijalnim jednačinama višeg reda

Za obradu signala LTI sistemima posebno su važni sistemi sa jednim ulazom i jednim izlazom, jer prilikom rada sa složenijim sistemima koristimo princip superpozicije. Stoga se nećemo zadržavati na analizi sistema metodama varijabli stanja, već ćemo iz jednačina stanja odrediti relaciju koja povezuje jedan izlazni signal  $y_j(t)$  sa jednim ulaznim signalom  $e_k(t)$ . Gledano matematički, sistem od  $n$  simultanih diferencijalnih jednačina (4.51) prvog reda svodimo na jednu diferencijalnu jednačinu  $n$ -tog reda sa konstantnim koeficijentima:

$$a_n \frac{d^n y_j(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy_j(t)}{dt} + a_0 y_j(t) = b_m \frac{d^m e_k(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de_k(t)}{dt} + b_0 e_k(t). \quad (4.53)$$

Pri tome koristimo i jednačine (4.52) koje povezuju izlazne varijable sa varijablama stanja i pobudama. Uobičajena notacija pri radu sa varijablama stanja je da se sa  $x_i(t)$  označavaju varijable stanja, tj. elementi vektora stanja  $\mathbf{x}(t)$ , a sa  $e_i(t)$  pobudni signali (eksitacije), dok se pri analizi sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom sa  $x(t)$  obično označava ulazni, a sa  $y(t)$  izlazni signal signal. Zbog toga ćemo u daljnjem izlaganju, kada budemo koristili opis sistema diferencijalnim jednačinama višeg reda, koristiti sljedeći oblik:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t). \quad (4.54)$$

Sažeti oblik diferencijalne jednačine (4.54) se može zapisati sa:

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}. \quad (4.55)$$

U literaturi se koristi i zapis diferencijalne jednačine (4.54) sa operatorima  $D^k$  kojima se označava  $k$ -ta derivacija, pa se diferencijalna jednačina (4.54) može zapisati u obliku:

$$\left[ a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 \right] y(t) = \left[ b_m D^m + a_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_1 D + b_0 \right] x(t). \quad (4.56)$$

Koeficijenti  $a_k$  i  $b_k$  su povezani sa vrijednostima elemenata matrica **A**, **B**, **C** i **D** jer se diferencijalna jednačina (4.54) može izvesti iz sistema jednačina (4.51) i (4.52). Ako su koeficijenti  $a_k$  i  $b_k$  konstante, radi se o linearnim vremenski invarijantnim sistemima. Ako neki od ovih koeficijenata zavisi od vremena, onda se ponašanje sistema u toku vremena mijenja, te oblik izlaznog signala ne zavisi samo od oblika ulaznog signala, već i od trenutka pobuđivanja sistema, te kažemo da je sistem vremenski zavisian. Ako postoji neki koeficijent u jednačini (4.54) koji je funkcija ulaznog ili izlaznog signala, onda je ta diferencijalna jednačina nelinearna, te se radi o nelinearnim sistemima.

Diferencijalna jednačina (4.54) je nehomogena jer je njena desna strana različita od nule. Desna strana (4.54) je funkcija pobude, koja u opštem slučaju sadrži ulazni signal  $x(t)$  i njegove derivacije do  $m$ -tog reda. Uslov fizičke ostvarljivosti sistema je da je  $n \geq m$ .

Kod LTI sistema bez memorije svi koeficijenti osim  $a_0$  i  $b_0$  su jednaki nuli, te se linearna diferencijalna jednačina (4.54) svodi na algebarsku jednačinu:

$$y(t) = \frac{b_0}{a_0} x(t) = Kx(t), \quad (4.57)$$

tako da je određivanje odziva u ovakvim sistemima jednostavno. Realne kauzalne LTI sisteme sa memorijom analiziramo u konačnom vremenskom intervalu, koji je ograničen početnim trenutkom  $t_0$  kada počinje pobuda i krajnjim trenutkom  $t$ , koji može biti promjenljiv ako želimo da odredimo ponašanje sistema u bilo kom trenutku vremena nakon početnog trenutka posmatranja  $t_0$ .

Postupak traženja odziva LTI sistema sa memorijom svodi se na traženje rješenja nehomogene linearne diferencijalne jednačine  $n$ -tog reda sa konstantnim koeficijentima, čiji je opšti oblik dat u formi (4.54-4.56). Odziv se sastoji od rješenja odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine i

partikularnog dijela, a za kompletno rješavanje neophodno je specificirati i početne uslove u nekom trenutku vremena.

Rješenje homogene diferencijalne jednačine:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0, \quad (4.58)$$

koje se naziva *sopstveni odziv* sistema, je linearna kombinacija svih njenih partikularnih rješenja. Svaku homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima će zadovoljiti funkcija oblika  $e^{st}$ ,  $s \in \mathbb{C}$ . Uvrštavanjem ovog pretpostavljenog rješenja u (4.58) dobijamo:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) e^{st} = 0. \quad (4.59)$$

Vrijednosti  $s \in \mathbb{C}$  za koje je jednačina (4.59) zadovoljena dobijaju iz:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0. \quad (4.60)$$

Jednačina (4.60) se zove *karakteristična jednačina* sistema, a kompleksne učestanosti  $s \in \mathbb{C}$  koje je zadovoljavaju zovu se *sopstvene učestanosti* sistema. Budući da je karakteristična jednačina  $n$ -tog reda, postoji ukupno  $n$  korijena karakteristične jednačine  $s = p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , odnosno  $n$  sopstvenih učestanosti. Kada su sve sopstvene učestanosti različite, pojedinačna rješenja homogene diferencijalne jednačine (4.58) su:

$$y_1(t) = K_1 e^{p_1 t}, y_2(t) = K_2 e^{p_2 t}, \dots, y_n(t) = K_n e^{p_n t}. \quad (4.61)$$

Opšte rješenje homogene diferencijalne jednačine je:

$$y_s(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t}, \quad (4.62)$$

gdje su  $K_i$  konstante koje zavise od početnih uslova.

U slučaju višestrukih korijena izrazi postaju složeniji. Pretpostavimo da je korijen karakteristične jednačine  $p_1$  reda  $r$ , tj.  $p_1 = p_2 = \dots = p_r$ . Tada se može pokazati da su pojedinačna rješenja homogene diferencijalne jednačine vezana za ovu sopstvenu učestanost oblika:

$$y_1(t) = K_1 t^{r-1} e^{p_1 t}, y_2(t) = K_2 t^{r-2} e^{p_1 t}, \dots, y_{r-1}(t) = K_{r-1} t e^{p_1 t}, y_r(t) = K_r e^{p_1 t}. \quad (4.63)$$

Opšti oblik sopstvenog odziva je u ovom slučaju:

$$y_s(t) = \sum_{i=1}^r K_i t^{r-i} e^{p_i t} + \sum_{i=r+1}^n K_i e^{p_i t}. \quad (4.64)$$

Ukoliko postoji više višestrukih sopstvenih učestanosti, za svaku od njih se formira po jedna suma na način kao što je rađeno za višestruki korijen  $p_1$  u (4.64).

Sopstveni odziv može da bude potaknut pobudom, ali on postoji i kada je pobudna funkcija jednaka nuli, jer predstavlja rješenje homogene diferencijalne jednačine. Sopstveno rješenje opisuje razmjenu energije u sistemu koja se odvija bez uticaja vanjske pobude u smislu da vanjska pobuda ne utiče na oblik sopstvenog odziva. Pojam "sopstveno" potiče od činjenice da njegove komponente  $K_i e^{p_i t}$  osciluju isključivo sopstvenim učestanostima  $p_i$ , koje zavise samo od strukturne šeme i parametara sistema a ne od vanjske pobude. Vidjećemo kasnije da jedino konstante  $K_i$  sopstvenog rješenja zavise od pobudnog signala i zatečenog stanja, odnosno akumulisane energije u trenutku pobuđivanja sistema.

*Prinudni odziv* sistema je partikularni dio rješenja nehomogene diferencijalne jednačine koji zavisi od pobude. Taj partikularni dio odziva se pronalazi tako da se pretpostavi rješenje u vidu linearne kombinacije članova koji se pojavljuju s desne strane diferencijalne jednačine. Pri tome su koeficijenti linearne kombinacije nepoznati i određuju se uvrštavanjem pretpostavljenog rješenja u nehomogenu diferencijalnu jednačinu. Kada se radi sa složenim oblicima eksitacije, kod LTI sistema nema potrebe da se određuje partikularno rješenje na ovaj način. Dovoljno je pronaći impulsni odziv sistema, pa odziv na proizvoljnu pobudu odrediti kao konvoluciju pobudnog signala i impulsnog odziva.

*Kompletan odziv* jednak je zbiru sopstvenog i prinudnog odziva. U slučaju različitih sopstvenih učestanosti kompletan odziv je jednak:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} + y_p(t). \quad (4.65)$$

Kod stabilnih sistema prvi član iščezava tokom vremena i u sistemu se uspostavlja *ustaljeno stanje* kada je odziv jednak prinudnom odzivu. Zbog toga kažemo da prvi član opisuje *prelazni proces*. Ako je pobuda konstanta ili

prostoperiodična (trajna) funkcija, ustaljeno stanje se često naziva *stacionarno stanje*.

Kako bi odziv bio jednoznačno određen, neophodno je odrediti konstante  $K_i$ . One se mogu odrediti iz sistema od  $n$  jednačina koje se dobiju deriviranjem rješenja (4.65)  $n$  puta i uvrštavanjem poznatih vrijednosti kompletnog i partikularnog odziva, kao i njihovih izvoda u trenutku pobuđivanja sistema  $t_0$ . Radi jednostavnosti, gdje god to priroda problema dopušta, uzima se da je  $t_0 = 0$ . Budući da rješenje (4.65) vrijedi za  $t \geq 0_+$ , njegovim deriviranjem  $n$  puta i uvrštavanjem  $t = 0_+$ , formiramo sistem od  $n$  algebarskih jednačina:

$$\begin{aligned} y(0_+) - y_p(0_+) &= \sum_{i=1}^n K_i \\ \frac{dy}{dt}(0_+) - \frac{dy_p}{dt}(0_+) &= \sum_{i=1}^n p_i K_i \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0_+) - \frac{dy_p^{n-1}}{dt_p^{n-1}}(0_+) &= \sum_{i=1}^n p_i^{n-1} K_i, \end{aligned} \tag{4.66}$$

iz kojih je moguće odrediti  $n$  konstanti  $K_i$ . Vidimo da je za pronalaženje odziva neophodno poznavanje vrijednosti odziva neposredno nakon dovođenja eksitacije, tj. vrijednosti  $\frac{d^i y}{dt^i}(0_+)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Dakle, potrebno je pronaći način kako iz poznatih vrijednosti odziva u trenutku  $t = 0_-$  neposredno prije pobuđivanja sistema odrediti početne vrijednosti odziva u trenutku  $t = 0_+$ . U slučaju kada su odzivi i sve njihove derivacije kontinualne funkcije, rješenje je jednostavno jer je  $\frac{d^i y}{dt^i}(0_-) = \frac{d^i y}{dt^i}(0_+) = \frac{d^i y}{dt^i}(0)$ , za  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Kod neregularnih komutacija, kod kojih ovo nije uvijek zadovoljeno, problem se usložnjava i nećemo ga razmatrati u vremenskom domenu, jer se lakše rješava u domenu Laplasove transformacije, što ćemo vidjeti u Poglavlju 7.

Iz ovako postavljenog sistema (4.66) se jasno vidi da konstante  $K_i$  zavise od razlike početnih vrijednosti kompletnog i prinudnog odziva i njihovih derivacija u trenutku  $t = 0_+$ . U specijalnom slučaju, kada je

$\frac{d^i y}{dt^i}(0_+) = \frac{dy_p^i}{dt_p^i}(0_+)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , prelaznog procesa nema jer su sve konstante  $K_i$  jednake nuli i ustaljeno stanje se uspostavlja odmah nakon dovodenja pobude. Možemo posmatrati još dva specijalna slučaja. Prvi je kada su sve početne vrijednosti odziva i njegovih derivacija jednake nuli,  $\frac{d^i y}{dt^i}(0) = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Tada kažemo da se radi o sistemu bez akumulisane energije. Konstante  $K_i$  i sopstveni odziv zavise samo od partikularnog rješenja, odnosno same pobude. Drugi specijalan slučaj je kada je sistem nepobuđen. Desna strana diferencijalne jednačine je tada jednaka nuli, što znači da je i partikularno rješenje jednako nuli, te je  $\frac{d^i y_p}{dt^i}(0_+) = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . U ovom slučaju konstante  $K_i$  i sopstveni odziv zavise samo od  $\frac{d^i y}{dt^i}(0) = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , tj. od akumulisane energije zatečene u sistemu u početnom trenutku posmatranja.

Označimo sa  $K_{0i}$  konstante koje se dobiju kada je  $\frac{d^i y_p}{dt^i}(0_+) = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  (nepobuđen sistem, sopstveni odziv zavisi samo od akumulisane energije), a sa  $K_{pi}$  konstante koje se dobiju kada je  $\frac{d^i y}{dt^i}(0) = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  (akumulisana energija jednaka nuli, sopstveni odziv zavisi samo od pobude). Po principu superpozicije vrijedi da je  $K_i = K_{0i} + K_{pi}$ . Kompletan odziv u slučaju različitih sopstvenih učestanosti se tada može prikazati u obliku:

$$y(t) = \left( \sum_{i=1}^n K_{0i} e^{p_i t} + \sum_{i=1}^n K_{pi} e^{p_i t} \right) + y_p(t), \quad (4.67)$$

gdje dvije sume u zagradi predstavljaju sopstveni odziv, a  $y_p(t)$  je prinudni odziv sistema. Drugačijim grupisanjem ukupan odziv se može prikazati i u obliku:



$$y(t) = \sum_{i=1}^n K_{0i} e^{p_i t} + \left( \sum_{i=1}^n K_{pi} e^{p_i t} + y_p(t) \right) = y_a(t) + y_e(t), \quad (4.68)$$

tj. kao zbir odziva na akumulisanu energiju, koji je dat prvom sumom i odziva sistema bez akumulisane energije, koji se sastoji od sopstvenog i prinudnog odziva na eksitaciju (grupisani u zagradi).

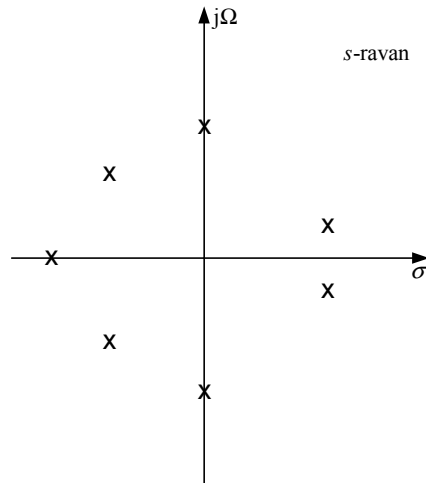
### **Oblici sopstvenog odziva**

Sopstvene učestanosti su u opštem slučaju kompleksni brojevi  $p_k = \sigma_k + j\Omega_k$ . Ako se radi o realnim vrijednostima  $p_k = \sigma_k$ , odgovarajući članovi u sopstvenom odzivu su oblika  $K_k e^{\sigma_k t}$ , dok su za kompleksne sopstvene učestanosti ti članovi jednaki  $K_k e^{(\sigma_k + j\Omega_k)t} = K_k e^{\sigma_k t} (\cos \Omega_k t + j \sin \Omega_k t)$ . Da bi opšte rješenje za sopstveni odziv bilo realna funkcija vremena, sopstvene učestanosti moraju da se pojavljuju u konjugovano kompleksnim parovima i konstante, koje stoje uz njih, takođe moraju da budu konjugovano kompleksne. To lako zaključujemo posmatrajući zbir dva člana sopstvenog odziva koji osciluju konjugovano kompleksnim sopstvenim učestanostima:

$$\begin{aligned} K_k e^{p_k t} + K_k^* e^{p_k^* t} &= |K_k| e^{j\varphi_k} e^{(\sigma_k + j\Omega_k)t} + |K_k| e^{-j\varphi_k} e^{(\sigma_k - j\Omega_k)t} = \\ &= |K_k| e^{\sigma_k t} \left( e^{j(\Omega_k t + \varphi_k)} + e^{-j(\Omega_k t + \varphi_k)} \right) = \\ &= 2|K_k| e^{\sigma_k t} \cos(\Omega_k t + \varphi_k), \end{aligned} \quad (4.69)$$

gdje smo koristili prikaz kompleksnih konstanti u polarnom koordinatnom sistemu:  $K_k = |K_k| e^{j\varphi_k}$  i  $K_k^* = |K_k| e^{-j\varphi_k}$ . Primjer rasporeda sopstvenih učestanosti u kompleksnoj  $s$  ravni dat je na Slici 4.17.

Ako je realni dio  $\sigma_k$  neke sopstvene učestanosti  $p_k = \sigma_k + j\Omega_k$  pozitivan, član sopstvenog odziva  $e^{p_k t} = e^{(\sigma_k + j\Omega_k)t} = e^{\sigma_k t} (\cos \Omega_k t + j \sin \Omega_k t)$  sa porastom vremenske varijable  $t$  poprima beskonačno veliku vrijednost, te je sistem nestabilan. Par jednostrukih konjugovano kompleksnih sopstvenih učestanosti  $p_k = j\Omega_k$  i  $p_k^* = -j\Omega_k$  koje se nalaze na imaginarnoj osi generišu u sopstvenom odzivu prostoperiodične oscilacije  $2|K_k| \cos(\Omega_k t + \varphi_k)$  sa konstantnom amplitudom. Sistem je stabilan, ali se nalazi na granici stabilnosti.



Slika 4.17 Primjer rasporeda sopstvenih učestanosti u kompleksnoj  $s$  ravni.

Međutim, ako su korijeni na imaginarnoj osi višestruki (reda  $r+1$ ,  $r \geq 1$ ), oni će u sopstvenom odzivu generisati članove oblika  $t^r \cos(\Omega t + \varphi)$  koji neograničeno rastu sa porastom vremena. Prema tome, sistem sa korijenima na imaginarnoj osi je stabilan samo ako su ti korijeni jednostruki.

Primjer 4.4:

Odrediti sopstveni odziv sistema kod koga su ulaz i izlaz vezani relacijom  $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$ , ako je pobuda jedinična odskočna funkcija  $x(t) = u(t)$ , a početni uslov dat sa  $y(0_+) = y_0$ .

*Rješenje:*

Data relacija na implicitan način opisuje odziv sistema. Kako bismo dobili izlazni signal kao funkciju ulaznog signala, moramo riješiti nehomogenu diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t). \quad (4.70)$$

Znamo da se rješenje diferencijalne jednačine sastoji od homogenog i partikularnog dijela, koji predstavljaju sopstveni  $y_s(t)$  i prinudni  $y_p(t)$  dio odziva:

$$y(t) = y_s(t) + y_p(t). \quad (4.71)$$

Partikularno rješenje je istog oblika kao pobuda i mora da zadovoljava nehomogenu diferencijalnu jednačinu. Za  $t < 0$  pobuda je jednaka nuli, desna strana diferencijalne jednačine je nula, pa je i prinudni odziv jednak nuli. Za  $t \geq 0_+$  pretpostavljamo prinudni odziv obliku konstante  $y_p(t) = K_p$ , tako da nakon uvrštavanja pretpostavljenog rješenja u nehomogenu diferencijalnu jednačinu dobijamo:

$$2K_p = 1 \Rightarrow K_p = \frac{1}{2}. \quad (4.72)$$

Partikularno rješenje, odnosno prinudni odziv je:

$$y_p(t) = \frac{1}{2}u(t). \quad (4.73)$$

Sopstveni odziv  $y_s(t)$  je rješenje homogene diferencijalne jednačine:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0. \quad (4.74)$$

Sopstveni odziv pretpostavljamo u obliku:

$$y_s(t) = Ke^{st}, \quad (4.75)$$

pa nakon njegovog uvrštavanja u homogenu diferencijalnu jednačinu dobijamo:

$$Kse^{st} + 2Ke^{st} = Ke^{st}(s+2) = 0. \quad (4.76)$$

Karakteristična jednačina ovog sistema je:

$$s + 2 = 0, \quad (4.77)$$

čije rješenje daje sopstvenu učestanost  $s = -2$ .

Sopstveni odziv je:

$$y_s(t) = Ke^{-2t}. \quad (4.78)$$

Kompletan odziv je:

$$y(t) = Ke^{-2t} + \frac{1}{2}, \quad t \geq 0_+. \quad (4.79)$$

Konstantu  $K$  određujemo iz početnog uslova na sljedeći način:

$$y(0_+) = K + \frac{1}{2} = y_0 \Rightarrow K = y_0 - \frac{1}{2}. \quad (4.80)$$

Konačno, kompletan odziv sistema je:

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{1}{2}\right)e^{-2t} + \frac{1}{2}, \quad t \geq 0_+. \quad (4.81)$$

Pri tome je prelazni proces dat sopstvenim odzivom:

$$y_s(t) = \left(y_0 - \frac{1}{2}\right)e^{-2t}, \quad t \geq 0_+, \quad (4.82)$$

koji vremenom iščezava. Po završetku prelaznog procesa nastupa ustaljeno stanje jednako prinudnom odzivu. Iako teorijski gledano prelazni proces prestaje tek nakon beskonačno dugo vremena, mi možemo smatrati da je nakon dovoljno dugo vremena vrijednost sopstvenog odziva jako mala, te je:

$$y(t) \approx y_p(t) = \frac{1}{2}. \quad (4.83)$$

Kad bi ovaj sistem bio nepobuđen, njegov odziv bi bio jednak odzivu na akumulisanu energiju:

$$y_a(t) = y_0 e^{-2t}, \quad t \geq 0. \quad (4.84)$$

S druge strane, da je početni uslov jednak nuli, odziv bi bio jednak odzivu sistema bez akumulisane energije:

$$y_e(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}), \quad t \geq 0_+ . \quad (4.85)$$

□

### 4.5.3 Određivanje impulsnog odziva iz diferencijalne jednačine LTI sistema

Podsjetimo se da impulsni odziv predstavlja odziv sistema na pobudu u vidu jedinične impulsne funkcije. Prilikom određivanja bilo koje karakteristične funkcije sistema, pa tako i impulsnog odziva, svi početni uslovi se postavljaju na nulu, jer karakteristike sistema ne zavise od trenutno zatečene akumulisane energije.

Kako bismo odredili impulsni odziv LTI sistema opisanog diferencijalnom jednačinom, pretpostavimo da je desna strana diferencijalne jednačine opšteg oblika:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \quad (4.86)$$

jednaka  $x_0(t)$ , pa potražimo rješenje nehomogene diferencijalne jednačine date sa:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = x_0(t), \quad (4.87)$$

ako je pobudni signal  $x_0(t) = \delta(t)$  i pri nultim početnim uslovima. Partikularno rješenje je jednako nuli, jer je za  $x_0(t) = \delta(t)$  desna strana diferencijalne jednačine jednaka nuli za  $t \geq 0_+$ . Kompletan rješenje je jednako rješenju homogene diferencijalne jednačine i za slučaj različitih sopstvenih učestanosti ima oblik:

$$h_0(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t}, \quad t \geq 0_+ . \quad (4.88)$$

Budući da je pobuda jedinična impulsna funkcija i da su početni uslovi jednaki nuli, kompletan odziv (4.88) možemo posmatrati kao impulsni odziv nekog

sistema opisanog diferencijalnom jednačinom (4.87). Uveli smo oznaku  $h_0(t)$  kako bismo ovaj impulsni odziv razlikovali od impulsnog odziva posmatranog sistema koji je opisan diferencijalnom jednačinom (4.86). Posmatrani sistem opisan sa (4.86) se od sistema opisanog sa (4.87) razlikuje samo po načinu kako se formira pobudna funkcija (desna strana diferencijalne jednačine). Za  $x_0(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$  ove dvije diferencijalne jednačine postaju jednake. To znači da je odziv sistema (4.87) na pobudu  $x_0(t) = b_m \frac{d^m \delta(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{d\delta(t)}{dt} + b_0 \delta(t)$  jednak odzivu sistema (4.86) na pobudu  $x(t) = \delta(t)$ . Budući da smo odredili  $h_0(t)$  kao odziv sistema (4.87) na jediničnu impulsnu funkciju, impulsni odziv posmatranog sistema opisanog sa (4.86), na osnovu osobine linearnosti, pronalazimo kao linearnu kombinaciju odziva  $h_0(t)$  i njegovih derivacija:

$$h(t) = b_m \frac{d^m h_0(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dh_0(t)}{dt} + b_0 h_0(t), \quad t \geq 0_+. \quad (4.89)$$

## 4.6 Odziv LTI sistema na kompleksnu eksponencijalnu pobudu

Praćenje ponašanja sistema prilikom pobude kompleksnim eksponencijalnim signalima omogućava sagledavanje karakteristika sistema u frekvencijskom domenu. Posmatranje karakteristika sistema u frekvencijskom domenu veoma je važno pri analizi i obradi, a posebno pri filtriranju signala, pa su razvijene i posebne metode projektovanja filtera na osnovu zahtjeva koji se postavljaju u frekvencijskom domenu. Pored toga, u poglavljima koja slijede, vidjećemo da se široka klasa signala može predstaviti linearnom kombinacijom elementarnih kompleksnih eksponencijalnih signala. Osobina linearnosti konvolucije nam omogućava da odzive na signale složenih oblika pronađemo kao linearnu kombinaciju odziva na elementarne kompleksne eksponencijalne signale.

### 4.6.1 Funkcija prenosa LTI sistema

Pretpostavimo da je pobuda linearnog, vremenski invarijantnog sistema kompleksna eksponencijalna funkcija data sa  $x(t) = e^{st}$ . Pod tim uslovom odziv sistema je jednak:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \right] e^{st}, \quad \forall t. \quad (4.90)$$

Definišimo *funkciju prenosa* sistema sa:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau. \quad (4.91)$$

Tada je odziv LTI sistema na pobudu oblika  $x(t) = e^{st}$  dat sa:

$$y(t) = H(s)e^{st}, \quad (4.92)$$

što znači da je istog oblika kao pobuda, samo korigovan funkcijom prenosa u smislu da je pomnožen konstantom  $|H(s)|$  i fazno pomjeren za  $\arg H(s)$ . Pobudna funkcija za koju LTI sistem ima odziv istog oblika kao pobuda naziva se *sopstvena funkcija sistema*. Vrijednosti  $|H(s)|$  i  $\arg H(s)$  ovise o kompleksnoj učestanosti  $s$ , što znači da će sistem na različite načine modifikovati pobude koje imaju oblik kompleksne eksponencijalne funkcije, ali su različitih kompleksnih učestanosti.

### 4.6.2 Frekvencijske karakteristike LTI sistema

Ukoliko linearni vremenski invarijantan sistem pobudimo prostoperiodičnom eksponencijalnom funkcijom datom sa  $x(t) = e^{j\Omega t}$ , odziv je jednak:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\Omega(t-\tau)}d\tau = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau \right] e^{j\Omega t}. \quad (4.93)$$

Ako definišemo *frekvencijsku karakteristiku* LTI sistema sa:

$$H(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau, \quad (4.94)$$

lako uočavamo da je odziv takođe prostoperiodična eksponencijalna funkcija iste učestanosti kao pobuda:

$$y(t) = H(\Omega) e^{j\Omega t}. \quad (4.95)$$

Modul  $|H(\Omega)|$  je *amplitudna karakteristika*, dok je  $\arg H(\Omega)$  *fazna karakteristika* sistema. Amplitudna karakteristika nam ukazuje na to kako će sistem modifikovati amplitudu prostoperiodičnih signala različitih učestanosti, dok nam fazna karakteristika govori o tome kako će signal na izlazu biti fazno pomjeren u odnosu na ulazni signal. To postaje jasnije ako posmatramo pobudu u obliku  $x(t) = \cos\Omega_0 t$ . Budući da pobudni signal možemo napisati kao:

$$x(t) = \frac{e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}}{2}, \quad (4.96)$$

odziv će biti jednak:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} H(\Omega_0) e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2} H(-\Omega_0) e^{-j\Omega_0 t} = \\ &= \frac{1}{2} |H(\Omega_0)| e^{j\arg H(\Omega_0)} e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2} |H(-\Omega_0)| e^{j\arg H(-\Omega_0)} e^{-j\Omega_0 t}. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Kod impulsnih odziva koji su realne funkcije vremena, vrijedi da je:

$$H^*(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{j\Omega t} dt, \quad (4.98)$$

$$H(-\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{j\Omega t} dt. \quad (4.99)$$

Iz prethodnih jednakosti jasno slijedi da je:

$$H(-\Omega) = H^*(\Omega). \quad (4.100)$$

Zbog toga je:



$$|X(-\Omega)| = |H^*(\Omega)| = |H(\Omega)|, \quad (4.101)$$

$$\arg X(-\Omega) = \arg X^*(\Omega) = -\arg X(\Omega). \quad (4.102)$$

Koristeći (4.101) i (4.102) odziv (4.97) možemo napisati u jednostavnijem obliku:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} |H(\Omega_0)| e^{j \arg H(\Omega_0)} e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2} |H(\Omega_0)| e^{-j \arg H(\Omega_0)} e^{-j\Omega_0 t} = \\ &= |H(\Omega_0)| \cos(\Omega_0 t + \arg H(\Omega_0)). \end{aligned} \quad (4.103)$$

Vidimo da se amplituda izlaznog signala razlikuje od amplitude ulaznog signala za faktor  $|H(\Omega_0)|$ , te da su ta dva signala međusobno fazno pomjerena za  $\arg H(\Omega_0)$ . Ovi iznosi zavise od vrijednosti amplitude i faze karakteristike za učestanosti ulaznog signala.

## 4.7 Korelacija

*Korelacija* signala  $x(t)$  sa signalom  $s(t)$  je jednodimenzionalna funkcija vremena definisana sa:

$$R_{xs}(t) = x(t) \otimes s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau) s(t+\tau) d\tau, \quad (4.104)$$

dok je korelacija  $s(t)$  sa  $x(t)$  definisana sa:

$$R_{sx}(t) = s(t) \otimes x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(\tau) x(t+\tau) d\tau. \quad (4.105)$$

*Autokorelacija* je korelacija signala sa samim sobom:

$$R_{xx}(t) = x(t) \otimes x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau) x(t+\tau) d\tau. \quad (4.106)$$

Ako posmatramo autokorelaciju, njena vrijednost je najveća u nuli, jer se tad prije računanja integrala sve vrijednosti signala kvadriraju. Kako bismo dokazali da je vrijednost autokorelacije najveća u nuli, počimo od Švarcove nejednakosti:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x_1^*(t) x_2(t) dt \right| \leq \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |x_2(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.107)$$

i primijenimo je na autokorelaciju:

$$\begin{aligned} |R_{xx}(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau) x(t+\tau) d\tau \right| \leq \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |x(t+\tau)|^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau) x(\tau) d\tau = |R_{xx}(0)|, \end{aligned} \quad (4.108)$$

jer pomjeranje signala duž vremenske ose ne utiče na vrijednost integrala koji se računa od  $-\infty$  do  $\infty$ . Dakle, vrijedi da je:

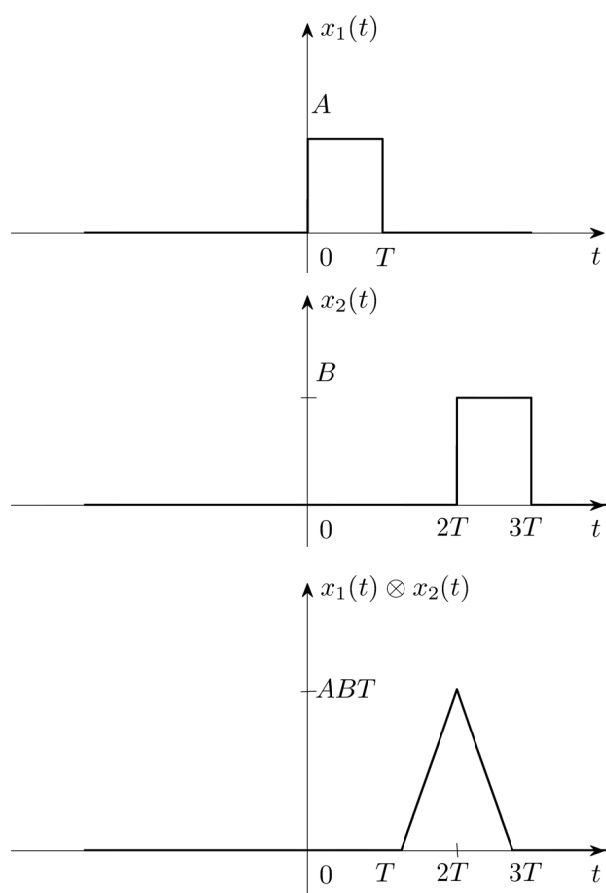
$$|R_{xx}(t)| \leq |R_{xx}(0)|. \quad (4.109)$$

Zbog ove osobine, korelacija se često koristi za prepoznavanje uzoraka, tj. za detekciju signala poznatog oblika u nepoznatom signalu. Prilikom prevlačenja uzorka preko nepoznatog signala, ukoliko se u ispitivanom signalu nađe na dio koji je istog ili sličnog oblika kao uzorak, vrijednost korelacije u tom trenutku postaje znatno veća nego u trenucima kad ne postoji sličnost signala.

Korelacija odgovara površini ispod proizvoda dva signala, pri čemu se jedan od njih pomjera u vremenu. Za razliku od konvolucije, pri računanju korelacije se ne radi refleksija signala. Veza korelacije i konvolucije se može iskazati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} R_{xs}(t) = x(t) \otimes s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\theta) s(t+\theta) d\theta \Big|_{\theta \rightarrow -\tau} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(-\tau) s(t-\tau) d\tau = x^*(-t) * s(t) \end{aligned} \quad (4.110)$$

Na Slici 4.18 dat je primjer korelacije signala.



Slika 4.18 Korelacija signala.